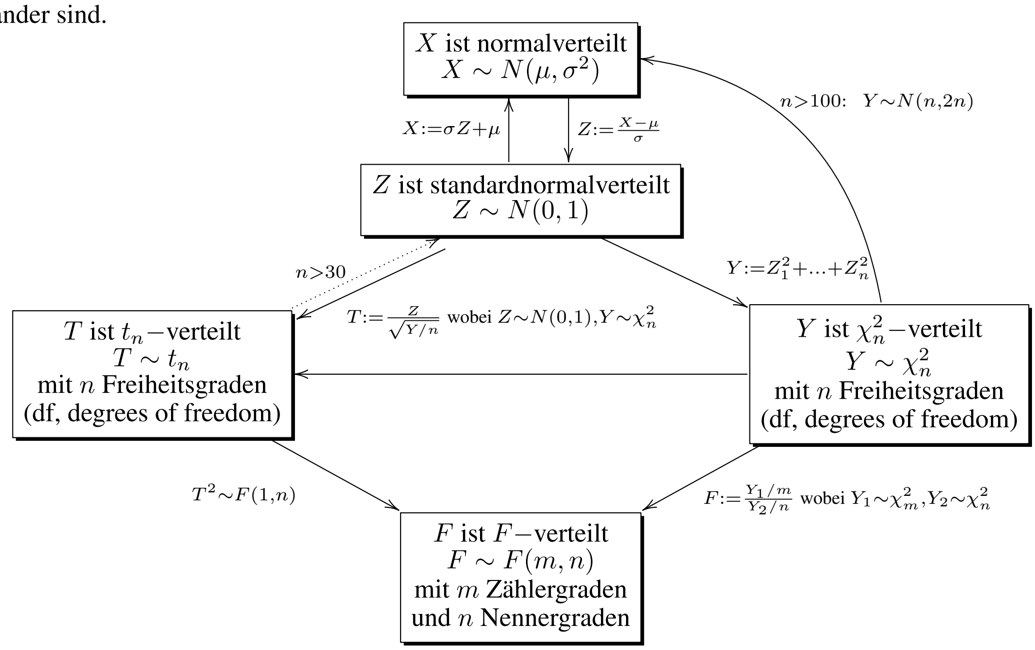
Zusammenhang zwischen Normalverteilung und χ^2-, $F-$ und $t-$Verteilung

Im Folgenden ist eine kleine Übersicht der Verteilungen, deren Zusammenhänge man für Standardtests benötigt.
Stillschweigend wird hier davon ausgegangen, dass, falls man eine Interaktion von mehreren Zufallsvariablen hat, d. h. bei den Quotienten, Produkte und Summen von Zufallsvariablen der t_n, χ^2, F- Verteilungen, die auftretenden Zufallsvariablen paarweise stochastisch unabhängig zueinander sind.



Definitionen:

- Normalverteilung:
  Eine Zufallsvariable X mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **normalverteilt**,
  in Zeichen $X \sim N(\mu, \sigma^2), \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 \in \mathbb{R}^+$, falls die Wahrscheinlichkeitsdichte folgende Form hat:
  $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

- Standardormalverteilung:
  Eine normalverteile Zufallsvariable $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ heißt **standardnormalverteilt**, falls $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$.

- χ^2-Verteilung:
  Eine Zufallsvariable Y heißt **χ^2-verteilt mit n Freiheitsgraden**, in Zeichen $X \sim \chi^2(n), n \in \mathbb{N}$, falls sie als Summe von n quadrierten, stochastisch unabhängigen, standardnormalverteilten Zufallsvariablen Z_i geschrieben werden kann:
  $$Y = Z_1^2 + \ldots + Z_n^2 \text{ wobei } Z_i \sim N(0,1) \text{ und paarweise st. unabhängig für } i = 1, \ldots, n$$
  Dies ist äquivalent zu:
  $$Y = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \text{ für } Z_i \sim NID(0,1) \text{ für } i = 1, \ldots, n \Rightarrow Y \sim \chi^2(n)$$

- t-Verteilung:
  Eine Zufallsvariable T heißt **t-verteilt mit n Freiheitsgraden**, in Zeichen $T \sim t(n), n \in \mathbb{N}$, falls sie als Quotient zweier unabhängigen Zufallsvariablen geschrieben werden kann, wobei im Zähler $Z \sim N(0,1)$ und im Nenner die Wurzel einer standardisierten, d. h. in diesem Fall durch die Anzahl der Freiheitsgrade n geteilten $\chi^2(n)$-verteilten Zufallsvariable Y steht:
  $$T = \frac{Z}{\sqrt{Y/n}} \Rightarrow T \sim t(n)$$

- F-Verteilung:
  Eine Zufallsvariable F heißt **F-verteilt mit m Zählergraden und n Nennergraden**, in Zeichen $F \sim F(m,n), m, n \in \mathbb{N}$, falls sie als Quotient zweier unabhängigen , standardisierter, χ^2-verteilter Zufallsvariablen $Y_1 \sim \chi^2(m), Y_2 \sim \chi^2(n)$ geschrieben werden kann:
  $$F = \frac{Y_1/m}{Y_2/n} \Rightarrow F \sim F(m,n)$$