Zeitreihenökonometrie

Übungsaufgaben – Blatt 8

1. **Aufgabe** *(Zur Konvergenz in Wahrscheinlichkeit und Verteilung)*
Es seien X, X_i $(i = 1, \ldots, 10)$, Y und Y_j $(j = 1, 2, 3)$ jeweils unabhängige standardnormalverteilte Zufallsvariablen. Gegeben seien folgende Folgen von Zufallsvariablen, $T = 1, 2, \ldots$:

   (a) (2 Punkte) $A_T = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{10} X_i^2$,

   (b) (1 Punkt) $B_T = \frac{X}{T \cdot Y} + 5$,

   (c) (2 Punkte) $C_T = X^2 + \frac{1}{T}Y^2$,

   (d) (2 Punkte) $D_T = X^2 + (-1)^T Y^2$,

   (e) (2 Punkte) $E_T = \frac{1}{T}\frac{3 \cdot \sum_{i=1}^{5} X_i^2}{5 \cdot \sum_{j=1}^{3} Y_j^2}$,

   (f) (2 Punkte) $F_T = T \cdot E_T$.

   Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten (Konvergenz in Wahrscheinlichkeit / Verteilung) dieser Folgen von Zufallsvariablen für $T \to \infty$.
Hinweis: Zu Wahrscheinlichkeitsverteilungen siehe z.B. Wooldridge (2009), Appendix B.5.

2. **Aufgabe** *(Momente von AR(2)-Prozessen)*
Es sei folgender AR(2)-Prozess gegeben:

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + e_t, \quad e_t \sim i.i.d.(0, \sigma^2), \quad y_{-1} = y_0 = 0. \tag{1}$$

   (a) (2 Punkte) Berechnen Sie $E(y_t)$ für den Fall, dass der Prozess kovarianzstationär ist.

   (b) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass für die Varianz eines kovarianzstationären Prozesses gilt:

   $$\gamma_0 = \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \sigma^2.$$

   Hinweis: Es ist hilfreich, den AR-Prozess um den Erwartungswert zu bereinigen indem der nach α_0 aufgelöste Ausdruck aus Teil (a) in (1) eingesetzt wird und (1) anschließend entsprechend umgeformt wird.
Bedenken Sie zudem $Var(y_t) = \gamma_0$ und

   $$\gamma_k = Cov(y_t, y_{t-k}) = E[(y_t - E[y_t])(y_{t-k} - E[y_{t-k}])].$$

   (c) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass für die Autokovarianzfunktion dieses Prozesses für $k = 1, 2, \ldots$ gilt:

   $$\gamma_k = \alpha_1\gamma_{k-1} + \alpha_2\gamma_{k-2}.$$

   (d) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Autokovarianzparameter γ_k, $k = 0, 1, 2$ in Abhängigkeit der Parameter des AR(2)-Prozesses, d.h. in Abhängigkeit von α_0, α_1, α_2 und σ^2.
Hinweis: Verwenden Sie die Formeln aus Teil (b) und (c).

   (e) (2 Punkte) Stellen Sie die Autokorrelation ρ_k einerseits in Abhängigkeit von γ_0 und γ_k dar und andererseits für $k = 0, 1, 2$ in Abhängigkeit der Parameter des AR(2)-Prozesses bzw. für $k \geq 3$ in Abhängigkeit von vergangenen ρ_j und der Parameter des AR(2)-Prozesses.

   (f) (2 Punkte) Berechnen Sie die Autokorrelationen eines solchen kovarianzstationären Prozesses mit $\sigma^2 = 1$ für $k = 0, 1, 2, 3, 4$ für die Fälle

      i. $\alpha_1 = 0.3$ und $\alpha_2 = 0.4$,

      ii. $\alpha_1 = -0.5$ und $\alpha_2 = 0.36$,

   Welche Ergebnisse erhalten Sie für $\sigma^2 = 4$?