Zeitreihenökonometrie

Übungsaufgaben – Blatt 7

1. **Aufgabe** *(Zur Einschwingphase)*
   Gegeben sei folgender AR(1)-Prozess mit Schocks $e_t \sim WN(0, \sigma^2)$ und deterministischem y_0:

   $$y_t = a \cdot y_{t-1} + e_t$$

   Wenn man für diesen Prozess eine Monte Carlo Simulation durchführt, teilt man den simulierten Zeitraum meist in zwei Perioden auf, die Einschwingphase und die Untersuchungsphase.

   (a) (1 Punkt) Wozu dient die Einschwingphase?

   (b) (3 Punkte) Berechnen Sie für $a = 0.9$ und $a = 0.99$ die Mindestdauer der Einschwingphase, damit sich $Var(y_t)$ von einer Periode zur nächsten relativ um höchstens 0.05% verändert. Erläutern Sie ihre Ergebnisse.
   Hinweis: Verwenden Sie zur Erleichterung z.B. Excel.

2. **Aufgabe** *(Theorie und Simulation der Einschwingphase)*
   Nun soll ein AR(1)-Prozess untersucht werden, welcher eine Konstante enthält

   $$y_t = \nu + \alpha y_{t-1} + e_t, \quad e_t \sim i.i.d.(0, \sigma^2).$$

   (a) (2 Punkte) Stellen Sie y_t in Abhängigkeit von y_0 und den Fehler dar (Herleitung).

   (b) (1 Punkt) Berechnen Sie $E[y_t]$.

   (c) (2 Punkte) Berechnen Sie $E[y_t]$ für $t \to \infty$. Denken Sie an eine Fallunterscheidung.

   (d) (2 Punkte) Passen Sie das Simulationsprogramm `mcarlo1_gen_ar1.r` an, um folgenden Prozess zu simulieren:

   $$y_t = 20 + 0.9 \cdot y_{t-1} + e_t, \quad e_t \sim N(0; 1)$$

   Verwenden Sie hierbei $y_0 = 100$ und lassen Sie sich 15 Realisationen in einem gemeinsamen Liniendiagramm für den gesamten Zeitraum (50 Perioden Einschwingphase und 20 Perioden Untersuchungsphase) ausgeben.

   (e) (2 Punkte) Erläutern Sie den Verlauf der Realisationen aus (d) im Hinblick auf Ihre bisherigen Ergebnisse.

3. **Aufgabe** *(Gesetz der iterierten Erwartungswerte)*

   (a) (2 Punkte) Nennen und interpretieren Sie das Gesetz der iterierten Erwartungswerte anhand eines Beispiels.

   (b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass aus $E[u_t|x_t] = 0$ folgt, dass $E[u_t] = 0$ und $Cov(u_t, x_t) = 0$.

4. **Aufgabe** *(Von den Abweichungen zur ursprünglichen Form eines AR-Prozesses)*
   (3 Punkte) Gegeben sei der stationäre AR(1)-Prozess der Form

   $$\tilde{y}_t = \alpha \cdot \tilde{y}_{t-1} + e_t, \quad |\alpha| < 1,$$

   mit $\tilde{y}_t$ als Abweichung von einem linearen Trend. Berechnen Sie dazu den unbedingten Erwartungswert der entsprechenden trendbehafteten Variable y_t und geben Sie den Prozess für y_t explizit an.