Übung zu Kapitalmarkttheorie II

Michael Heyna (M.Sc.)
Lehrstuhl für Theoretische Volkswirtschaftslehre
Prof. Dr. Lutz Arnold
Universität Regensburg
Tel: +49-941-943-2703
Raum RW(L) 4.06

WS 2022/2023

Inhaltsverzeichnis

1 EINFÜHRUNG 2
1.1 Konzepte . . . 2
1.2 Nutzenmaximierung im Zwei-Güter-Fall . . . 2
1.3 Zahlenbeispiele . . . 2
1.4 Skalarprodukt - Gütermarkt . . . 3
1.5 Skalarprodukt - Finanzmarkt . . . 3

2 ZWEI-PERIODEN-ZWEI-ZUSTÄNDE-MODELL 4
2.1 Annahmen . . . 4
2.2 Allais-Paradoxon . . . 4
2.3 St.-Petersburg-Paradoxon . . . 4

3 TERMINMÄRKTE (CCMs - mit Zeit und Unsicherheit) 5
3.1 Effiziente Risikoteilung . . . 5
3.2 Erster Hauptsatz der Wohlfahrtstheorie mit CCMs . . . 5

4 FINANZMARKTÖKONOMIE 6
4.1 Generierung von Payoffs . . . 6
4.2 Leerverkäufe . . . 6
4.3 Zahlenbeispiel I . . . 6
4.4 Zahlenbeispiel II . . . 6

5 CONSUMPTION-BASED ASSET PRICING 7
5.1 Fundamentale Asset-Pricing-Gleichung . . . 7
5.2 Stochastischer Diskontfaktor . . . 7

6 ANWENDUNGEN (der Fundamentalen Asset-Pricing-Gleichung) 8
6.1 Kovarianz . . . 8
6.2 Zahlenbeispiel . . . 8
6.3 Random Walk . . . 8

7 VOLLSTÄNDIGE MÄRKTE ($S \geq 2$) 9
7.1 Matrixmultiplikation und lineare Gleichungssysteme 9
7.2 Lineare Unabhängigkeit 9
7.3 Arrow-Securities (AS) 9
7.4 Optionen I 10
7.5 Optionen II 10

8 ASSET-PRICING ($S \geq 2$) 11
8.1 Fundamentale Asset-Pricing-Gleichung 11
8.2 Anwendung 11
8.3 Arbitragefreiheit I 11
8.4 Arbitragefreiheit II 11

9 AKTIENMARKT-ÖKONOMIE (Firmen) 12

10 MODIGLIANI-MILLER-THEOREM 12

11 CAPITAL ASSET PRICING MODEL (CAPM) 12

12 ZEIT UND UNSICHERHEIT ($T > 2$) 13
12.1 Gesetz der iterierten Erwartungen (LIE) 13
12.2 Zahlenbeispiel I 13
12.3 Zahlenbeispiel II 13

13 GLEICHGEWICHT UND DIE FUNDAMENTALEN GLEICHUNGEN DES ASSET-PRICINGS 15
13.1 Spezielles Gleichgewicht 15
13.2 Zahlenbeispiel 15

14 FUNDAMENTALWERT 16
14.1 Vollständige Induktion 16
14.2 Random Walk 16

1 EINFÜHRUNG

1.1 Konzepte

a) Wiederholen Sie die Konzepte *Indifferenzkurven* und *Grenzrate der Substitution*. Ermitteln Sie anschließend für die Nutzenfunktion

$$U(c_1, c_2) = c_1^{\alpha} c_2^{\beta} \tag{1}$$

die Grenzrate der Substitution (GRS). Welchen Wert nimmt sie an, wenn Sie $c_1 = 2$, $c_2 = 6$, $\alpha = 2$ und $\beta = 0{,}5$ unterstellen?

b) Wiederholen Sie die Konzepte *Edgeworth-Box* und *Pareto-optimale Allokation*.

c) Es gebe zwei Individuen, die jeweils zwei Güter, c_1 und c_2, konsumieren können. Die Nutzenfunktionen der beiden Individuen lauten

$$u^1(c_1, c_2) = c_1^{\alpha} c_2^{1-\alpha} \tag{2}$$

und

$$u^2(c_1, c_2) = c_1^{\beta} c_2^{1-\beta} \tag{3}$$

Ermitteln Sie die Kontraktkurve in der Edgeworth-Box zunächst allgemein. Setzen Sie anschließend $\alpha = \frac{1}{2}$ und $\beta = \frac{2}{3}$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

1.2 Nutzenmaximierung im Zwei-Güter-Fall

Beschreiben und lösen Sie allgemein das Optimierungsproblem, das sich im Zwei-Güter-Fall bei beliebiger Nutzenfunktion und Budgetbeschränkung ergibt. Was sagt die Optimalitätsbedingung aus?

1.3 Zahlenbeispiele

Betrachten Sie das folgende Beispiel. Gegeben sind $q_1 = 4, q_2 = 6, I = 130$ und

$$u(c_1, c_2) = (c_1 + 2)(c_2 + 1) \tag{4}$$

a) Bestimmen Sie das nutzenmaximierende Güterbündel.

b) Wie lautet die Lösung für die Nutzenfunktion

$$u(c_1, c_2) = c_1^{\alpha} c_2^{\beta} \tag{5}$$

mit $\alpha = 0,5, \beta = 2, I = 80, q_1 = 2, q_2 = 4$?

1.4 Skalarprodukt - Gütermarkt

Sie wollen bei Ihrem wöchentlichen Einkauf folgende Güter in den jeweiligen Mengen zu den gegebenen Preisen erwerben:

Einkaufsliste	Menge	Preis je Stück
Zahnpasta	1	3,50
Gurke	1	0,79
Tomate	3	0,45
Semmel	4	0,35
100 g Hackfleisch	2	2,80
Packung Chips	2	2,75
Tiefkühlpizza	2	3,15
Fußballmagazin	1	6,75
Stück Käse	2	2,45

Abbildung 1

a) Erstellen Sie den Mengenvektor und den dazugehörigen Preisvektor für diesen Einkauf.

b) Geben Sie den Preis des gesamten Einkaufs in Summen- und in Vektorschreibweise an.

1.5 Skalarprodukt - Finanzmarkt

Es sind folgende vier Aktientitel gegeben, die in gegebener Stückzahl zu den entsprechenden Preisen in Ihr Aktienportfolio aufgenommen werden:

Titel	Anzahl Aktien	Preis je Aktie
Bank AG	25	60,00
BVB	10	55,25
Versicherungsgesellschaft	15	46,00
Automobilindustrie	25	45,75

Abbildung 2

a) Geben Sie jeweils den zu dieser Transaktion gehörenden Mengen- sowie Preisvektor an.

b) Ermitteln Sie die Gesamtkosten Ihrer Transaktion.

2 ZWEI-PERIODEN-ZWEI-ZUSTÄNDE-MODELL

2.1 Annahmen

Nennen Sie die Annahmen des Grundmodells aus der Vorlesung. Welche Eigenschaften hat die unterstellte Nutzenfunktion?

2.2 Allais-Paradoxon

Es gebe drei Zustände (s_1, s_2, s_3) mit den dazugehörigen Payoffs $(10Mio; 2Mio; 0)$. Veranschaulichen Sie anhand der zwei Alternativen (=Situationen) mit den gegebenen Lotterien aus Abbildung 3, dass das Allais-Paradoxon eine Schwäche der Erwartungsnutzentheorie aufzeigt.

	Alternative 1			Alternative 2		
	s_1	s_2	s_3	s_1	s_2	s_3
Auszahlung in €	10.000.000	2.000.000	0	10.000.000	2.000.000	0
Lotterie 1	0%	100%	0%	0%	15%	85%
Lotterie 2	10%	85%	5%	10%	0%	90%

Abbildung 3

2.3 St.-Petersburg-Paradoxon

Es wird Ihnen ein Spiel mit einer fairen Münze vorgeschlagen. Die Münze wird solange geworfen, bis zum ersten Mal Kopf fällt. Dann endet das Spiel. Fällt beim ersten Wurf „Kopf“, erhalten Sie 2 Euro. Nach jeder Runde, in der „Zahl“ fällt, verdoppelt sich der Gewinn. Fällt in der zweiten Runde „Kopf“, erhalten Sie also 4 Euro, in der dritten 8 Euro, in der vierten schon 16 Euro usw. Beantworten Sie die folgenden Fragen.

a) Wie hoch darf die Teilnahmegebühr für dieses Spiel sein, damit risikoneutrale Individuen daran teilnehmen?

b) Wie lässt sich mithilfe der Bernoulli-Nutzentheorie dieses Paradoxon lösen?

c) Warum liefert die Bernoulli-Nutzentheorie allerdings nur eine scheinbare Lösung?

d) Nennen Sie weitere Beispiele aus dem täglichen Leben, bei denen Entscheidungen unter Unsicherheit ein nicht wegzudenkendes Merkmal sind.

3 TERMINMÄRKTE (CCMs - mit Zeit und Unsicherheit)

3.1 Effiziente Risikoteilung

Stellen Sie die Ökonomie mit Terminmärkten (CCMs) für den Zwei-Individuen-Zwei-Zustände-Fall anhand der Edgeworth-Box dar, unter der Voraussetzung, dass für die Anfangsausstattung $y_0^i = 0$ und damit $c_0^i = 0$ gilt. Zum besseren Verständnis, fragen Sie sich zunächst, wie die Darstellung für Spot-Märkte aussehen müsste.

3.2 Erster Hauptsatz der Wohlfahrtstheorie mit CCMs

a) Was besagt der Erste Hauptsatz der Wohlfahrtstheorie? Was der Zweite?

b) Wiederholen Sie den Beweis des Theorems (Erster Hauptsatz der Wohlfahrtstheorie mit CCMs) aus Kapitel 3 der Vorlesung.

4 FINANZMARKTÖKONOMIE

4.1 Generierung von Payoffs

Gehen Sie von einem sicheren und einem riskanten Asset mit den dazugehörigen Preisen und Payoffs aus Kapitel 4 der Vorlesung aus.

a) Generieren Sie für $r = 0,05$ die Payoffs $(1; 0)$ und $(0; 1)$.

b) Wie generiert man beliebige andere Payoffs $(x; 0)$ und $(0; x)$?

4.2 Leerverkäufe

Nun liefere das riskante Asset in beiden Umweltzuständen einen positiven Payoff, d.h. $a_s > 0, s = 1, 2$, wobei $a_1 \neq a_2$ gilt. Zeigen Sie, dass Leerverkäufe unumgänglich sind, um die Payoff-Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu generieren.

4.3 Zahlenbeispiel I

Sei $a_1 = 2, a_2 = 3$.
Ermitteln Sie, wie viele Einheiten des sicheren und des riskanten Assets jeweils gehalten werden müssen, um den Payoff-Vektor $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ zu generieren.

4.4 Zahlenbeispiel II

Gegeben seien die beiden Vektoren $u = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

a) Ist es möglich, den Payoff-Vektor $\begin{pmatrix} 5,5 \\ 5 \end{pmatrix}$ zu generieren?

b) Stellen Sie das Ergebnis grafisch dar.

5 CONSUMPTION-BASED ASSET PRICING

5.1 Fundamentale Asset-Pricing-Gleichung

Gegeben sind die Nutzenfunktionen

$$u^i(c_0^i) = \frac{1}{1-\gamma^i}(c_0^i)^{1-\gamma^i} \tag{6}$$

und

$$u^i(c_s^i) = \frac{1}{1-\gamma^i}(c_s^i)^{1-\gamma^i} \tag{7}$$

mit den Budgetbeschränkungen $c_0^i = y_0^i - p\eta^i$ sowie $c_s^i = y_s^i + \eta^i a_s$, wobei η^i die Menge des riskanten Assets angibt, die der Investor i kauft.
Leiten Sie die Fundamentale Asset-Pricing-Gleichung her.

5.2 Stochastischer Diskontfaktor

Gegeben sind folgende Nutzenfunktionen:

$$u^i(c^i) = c^i - a^i(c^i)^2 \tag{8}$$

$$u^i(c^i) = \ln c^i \tag{9}$$

$$u^i(c^i) = (c^i)^\alpha \tag{10}$$

$$u^i(c^i) = \frac{1}{1-\gamma^i}(c^i)^{1-\gamma^i} \tag{11}$$

Bestimmen Sie jeweils den Stochastischen Diskontfaktor (SDF).

6 ANWENDUNGEN (der Fundamentalen Asset-Pricing-Gleichung)

6.1 Kovarianz

Für die Bepreisung von Assets ist die Kovarianz von großer Bedeutung. Was sagt diese Maßzahl aus? Beschreiben Sie das Konzept genauer.

6.2 Zahlenbeispiel

Gegeben seien zwei Assetrenditen X und Y mit vier möglichen Ausprägungen x_s bzw. y_s ($s = 1, 2, 3, 4$), die jeweils mit der gleichen Wahrscheinlichkeit eintreten ($p_s = 0.25$).

s:	1	2	3	4
x_s	0,00	0,05	0,10	0,15
y_s	-0,20	0,05	0,15	0,40
E(X)				
E(Y)				
x_s-E(X)				
y_s-E(Y)				

Abbildung 4

a) Berechnen Sie die Kovarianz zwischen X und Y.

b) Welche Probleme ergeben sich bei der Interpretation der Kovarianz? Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Kovarianz und dem Korrelationskoeffizienten?

c) Was ist eine Kovarianzmatrix?

6.3 Random Walk

Zeigen Sie, dass Assetpreise einem Random Walk folgen, wenn Sie die nötigen Annahmen treffen. Was bedeutet dies für Preisvorhersagen?

7 VOLLSTÄNDIGE MÄRKTE ($S \geq 2$)

7.1 Matrixmultiplikation und lineare Gleichungssysteme

Gegeben sind Matrix $\underline{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ und Vektor $\underline{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$

a) Ermitteln Sie deren Produkt. Berechnen Sie die Determinante und die Inverse der Matrix. Wiederholen Sie, falls nötig, die grundlegenden Regeln der Matrixmultiplikation.

Nun sei $\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ und $\underline{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

b) Ermitteln Sie auch hier deren Produkt.

c) Stellen Sie das folgende lineare Gleichungssystem in Vektorschreibweise dar und lösen Sie es:

$$\begin{aligned} 6z_1 + 3z_2 + z_3 &= 22 \\ z_1 + 4z_2 + z_3 &= 12 \\ 4z_1 - 4z_2 + 5z_3 &= 10 \end{aligned}$$

7.2 Lineare Unabhängigkeit

Es sei S=2 und es seien ausschließlich zwei riskante Assets (kein sicheres Asset) gegeben.

a) Illustrieren Sie, dass lineare Unabhängigkeit der Payoff-Vektoren Voraussetzung dafür ist, dass Sie die Payoffs (1;0) und (0;1) mit diesen Assets generieren können.

b) Was versteht man in diesem Zusammenhang unter Finanzmarktvollständigkeit?

7.3 Arrow-Securities (AS)

Es gebe nun drei Umweltzustände ($s = 1, 2, 3$). Nehmen Sie an, dass folgende Wertpapiere mit den dazugehörigen gleichgewichtigen Preisen $\underline{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,6 \\ 0,8 \end{pmatrix}$ gehalten werden:

$\underline{a_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\underline{a_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

a) Beschreiben Sie in Matrixschreibweise das Problem, um eine Arrow-Security für Zustand $s = 3$ zu erzeugen. Wie lautet das lineare Gleichungssystem?

b) Ermitteln Sie den Preis $\tilde{p}_s$ der Arrow-Securities für alle drei Zustände.

c) Liegt Finanzmarktvollständigkeit vor?

d) Ist Finanzmarktvollständigkeit erreichbar, wenn es weniger Wertpapiere als Umweltzustände gibt?

7.4 Optionen I

In einer Ökonomie mit drei möglichen Umweltzuständen ($s = 1, 2, 3$) ist ein Wertpapier mit Payoff-Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ gegeben.
Zudem gebe es zwei Call-Optionen mit Ausübungspreisen (strike prices p_s) 1 und 3.

a) Was ist eine Call-Option und was versteht man unter einem strike price?

b) Wie lauten die Payoff-Vektoren der beiden Optionen?

c) Wie lautet das lineare Gleichungssystem, das das Portfolio $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ liefert, mit dem die Arrow-Security für Zustand $s = 3$ nachgebildet werden kann?

d) Wie lauten die Portfolios, die die anderen beiden Arrow-Securities nachbilden?

e) Mit welchem Portfolio kann man sich eine sichere Auszahlung von 1 sichern?

f) Angenommen, das Wertpapier kostet 2 Euro. Call-Option 1 und Call-Option 2 kosten 1 bzw. 0,4 Euro. Bestimmen Sie den Preis der Arrow-Security für Zustand $s = 3$.

7.5 Optionen II

Ein Wertpapier liefere in drei Umweltzuständen ($s = 1, 2, 3$) den Payoff $\begin{pmatrix} 5 \\ 20 \\ 35 \end{pmatrix}$.

Mit welchen Ausübungspreisen (strike prices p_s) von Call-Optionen kann hier die Komplettierung des Finanzmarktes erreicht werden? Wie lauten die Payoff-Vektoren der beiden Optionen?

8 ASSET-PRICING ($S \geq 2$)

8.1 Fundamentale Asset-Pricing-Gleichung

a) Leiten Sie unter der Annahme einer additiv zeitlich separierbaren Nutzenfunktion die Fundamentale Asset-Pricing-Gleichung einer Arrow-Security für einen beliebigen Zustand $s \epsilon S$ her.

b) Wie lautet folglich die Fundamentale Asset-Pricing-Gleichung eines Assets k mit beleiebigen Payoffs in S Zuständen?

8.2 Anwendung

a) Schreiben Sie die Fundamentale Asset-Pricing-Gleichung eines Assets k auf.

b) Stellen Sie die risikoneutrale Wahrscheinlichkeit q_s in Abhängigkeit vom SDF (M_s), der (objektiven) Wahrscheinlichkeit π_s und dem sicheren Zinssatz $1 + r$ auf.

c) Bestimmen Sie q_s für die Nutzenfunktion eines risikoneutralen Marktteilnehmers.

d) Formulieren Sie die fundamentale Asset-Pricing-Gleichung in Abhängigkeit von q_s.

e) Bestimmen Sie q_s für die Nutzenfunktionen (9), (10) und (11).

8.3 Arbitragefreiheit I

Betrachten Sie die drei Wertpapiere aus Aufgabe 7.3:

$\underline{a_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\underline{a_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, mit Preisen $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}6 \\ 0{,}8 \end{pmatrix}$

und den dazugehörigen AS-Preisen $\tilde{p}_s = 0.2$ für alle Umweltzustände s.

a) Stellen Sie Arbitrageüberlegungen an, um zu zeigen, dass Asset 3 richtig bepreist ist.

b) Wenn der Preis von Asset 3 größer bzw. kleiner als für Arbitragefreiheit nötig wäre, welche Strategie würde zu einem risikolosen Gewinn führen?

8.4 Arbitragefreiheit II

Gegeben sind ein Asset k mit Payoff-Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $p_k = 4$, sowie die AS-Preise

$\underline{\tilde{p}} = \begin{pmatrix} 0,10 \\ 0,25 \\ 0,40 \end{pmatrix}$ für alle drei Zustände. Das verfügbare Einkommen beträgt 20 Einheiten.

a) Überprüfen Sie, ob Asset k korrekt bepreist ist.

b) Im Falle einer Fehlbepreisung, wie hoch wäre der mögliche Arbitragegewinn?

9 AKTIENMARKT-ÖKONOMIE (Firmen)

Zu diesem Kapitel gibt es keine Übungsaufgaben.

10 MODIGLIANI-MILLER-THEOREM

Zu diesem Kapitel gibt es keine Übungsaufgaben.

11 CAPITAL ASSET PRICING MODEL (CAPM)

Zu diesem Kapitel gibt es keine Übungsaufgaben.

12 ZEIT UND UNSICHERHEIT ($T > 2$)

12.1 Gesetz der iterierten Erwartungen (LIE)

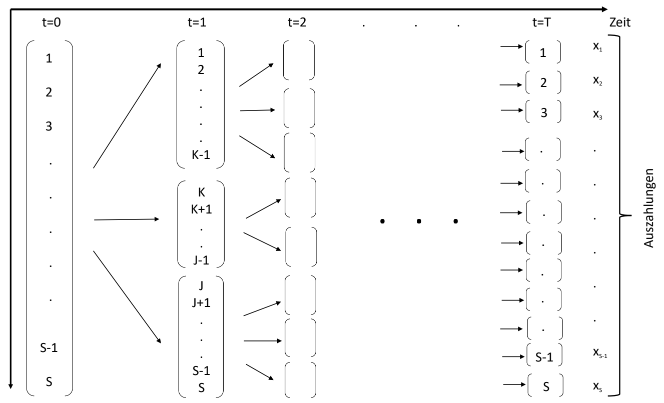

Abbildung 5

a) Was besagt das Gesetz der iterierten Erwartungen?

b) Erklären Sie Abbildung 5 anhand eines selbst gewählten Beispiels.

c) Zeigen Sie anhand Ihres selbst gewählten Beispiels die Gültigkeit folgender Gleichung:

$$E(x|\sigma) = E(E(x|\sigma^{'})|\sigma)$$

12.2 Zahlenbeispiel I

Es gebe fünf Umweltzustände, $\mathbb{S} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, und drei Zeitpunkte, $T = \{t_0, t_1, t_2\}$. Die Auszahlungen sind in Periode t_0 sowie in t_1 unbekannt. In der letzten Periode t_2 liegt eine totale Partitionierung vor. Jedem einzelnen Elementarereignis, $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$, mit dazugehöriger Eintrittswahrscheinlichkeit, $\pi_1 = \frac{1}{10}, \pi_2 = \frac{1}{10}, \pi_3 = \frac{1}{5}, \pi_4 = \frac{1}{5}, \pi_5 = \frac{2}{5}$, ist eine Auszahlung $x_s : \{100\}, \{50\}, \{200\}, \{300\}, \{150\}$ zugeordnet.
In t_1 gibt es zwei Informationsmengen, $\sigma_1^{'} = \{1, 2, 3\}$ und $\sigma_2^{'} = \{4, 5\}$, mit $\pi_{\sigma_1^{'}} = \frac{2}{5}$ und $\pi_{\sigma_2^{'}} = \frac{3}{5}$. Ferner gilt in t_2, $\sum\limits_{1}^{5} \pi_s = 1$.

a) Nennen Sie drei weitere mögliche Partitionierungen von $\mathbb{S}$.

b) Stellen Sie die Angaben dieses Beispiels entsprechend Abb. 5 graphisch dar.

c) Berechnen Sie den bedingten Erwartungswert $E(x|\sigma)$.

d) Berechnen Sie den bedingten Erwartungswert $E[E(x|\sigma^{'})|\sigma]$.

e) Vergleichen und interpretieren Sie die Ergebnisse aus den Teilaufgaben c) und d).

12.3 Zahlenbeispiel II

Nun gebe es sechs Umweltzustände, $\mathbb{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, und vier Zeitpunkte, $T = \{t_0, t_1, t_2, t_3\}$. Die Auszahlungen sind in t_0, t_1 sowie t_2 unbekannt. In t_3 liegt eine totale Par-

titionierung vor und die entsprechenden Auszahlungen sind $\{6\}, \{12\}, \{18\}, \{24\}, \{30\}, \{36\}$, mit den dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten $\pi_1 = \pi_2 = \frac{1}{30}$, $\pi_3 = \frac{1}{5}$, $\pi_4 = \frac{2}{5}$, $\pi_5 = \pi_6 = \frac{1}{6}$.
In t_1 wissen Sie, dass es zwei Informationsmengen, $\sigma_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ und $\sigma_2 = \{5, 6\}$, mit $\pi_{\sigma_1} = \frac{2}{3}$ und $\pi_{\sigma_2} = \frac{1}{3}$, gibt.
In t_2 sind vier Informationsmengen bekannt: $\sigma_1^{'} = \{1, 2\}$, $\sigma_2^{'} = \{3, 4\}$, $\sigma_3^{'} = \{5\}$ und $\sigma_4^{'} = \{6\}$, mit $\pi_{\sigma_1^{'}} = \frac{1}{15}$, $\pi_{\sigma_2^{'}} = \frac{3}{5}$, $\pi_{\sigma_3^{'}} = \frac{1}{6}$, $\pi_{\sigma_4^{'}} = \frac{1}{6}$.

a) Nennen Sie drei weitere mögliche Partitionierungen von $\mathbb{S}$.

b) Stellen Sie die Angaben dieses Beispiels graphisch dar.

c) Berechnen Sie den bedingten Erwartungswert $E(x|\sigma)$.

d) Berechnen Sie den bedingten Erwartungswert $E[E(x|\sigma^{'})|\sigma]$ in drei Schritten.

e) Vergleichen und interpretieren Sie die Ergebnisse aus den Teilaufgaben c) und d).

13 GLEICHGEWICHT UND DIE FUNDAMENTALEN GLEICHUNGEN DES ASSET-PRICINGS

13.1 Spezielles Gleichgewicht

a) Welches Gleichgewicht stellt sich auf dem Finanzmarkt ein, wenn Anfangsausstattung und Nutzenfunktion für jedes Individuum i gleich sind?

b) Wie nennt man ein solches Gleichgewicht? Illustrieren Sie es anhand der Edgeworth-Box.

c) Wie lautet in diesem Fall der Stochastische Diskontfaktor für die Nutzenfunktionen (8) und (9) aus Aufgabe 5.2?

13.2 Zahlenbeispiel

Es seien $\beta = 0{,}8$, $\pi_1 = \pi_2 = 0,5$, sowie die zwei nachfolgenden Nutzenfunktionen gegeben:

$$u^i(c^i) = 2 + 3c \tag{12}$$

$$u^i(c^i) = \frac{(c^i)^{1-\gamma}}{1-\gamma} \tag{13}$$

a) Bestimmen Sie für beide Nutzenfunktionen den SDF.

b) Bestimmen Sie für Nutzenfunktion (12) den risikolosen Zinssatz r_{t+1}.

c) Nehmen Sie $y_t = 3$, $y_{t+1,1} = 2$, $y_{t+1,2} = 2{,}5$ und $\gamma = 0{,}7$ an. Berechnen Sie für Nutzenfunktion (13) $E_t[M_{t+1}]$ und den risikolosen Zinssatz r_{t+1} im No-Trade-Equilibrium.

14 FUNDAMENTALWERT

14.1 Vollständige Induktion

a) Wiederholen Sie das Konzept der vollständigen Induktion

b) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2 \tag{14}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \tag{15}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2. \tag{16}$$

14.2 Random Walk

In Aufgabe 6.3 wurde bereits gezeigt, dass Assetpreise im Zwei-Perioden-Modell unter bestimmten Annahmen (Risikoneutralität, $\beta = 1$, $a_{t+1} = 0$) einem Random Walk folgen.

a) Zeigen Sie für den Mehr-Perioden-Fall, dass $p_t = p_0 + \sum_{\tau=1}^{t} \xi_\tau$ gilt.

b) Angenommen $\xi_t \sim iid(0, \sigma^2)$. Bestimmen Sie $E_0(p_t)$.

c) Wie entwickelt sich die Varianz von p_t im Zeitablauf und was bedeutet das für die Prognose des zukünftigen Assetpreises?