Bachelor-Prüfung „Kapitalmarkttheorie“

6 Kreditpunkte

SS 2021

16.8.2021

Prof. Dr. Lutz Arnold

Bitte gut leserlich ausfüllen:	*Wird vom Prüfer ausgefüllt:*			
Name:	A	B1	B2	$\sum$
Vorname:				
Matr.-nr.:				

- **Bearbeiten Sie <u>alle sechs</u> Aufgaben A1-A6 <u>und eine der zwei</u> Aufgaben B1-B2!**
- In den Aufgaben **A1-A6** sind maximal je **5 Punkte** erreichbar. Machen Sie immer so weit wie möglich von den Zahlenangaben in den Aufgabenstellungen Gebrauch (keine allgemeinen Lösungen und Zwischenschritte!). Tragen Sie die Lösungen bitte in die Lösungsfelder auf dem Klausurbogen ein.
- In den Aufgaben **B1-B2** sind maximal je **20 Punkte** erreichbar.
- Zugelassenes Hilfsmittel: nicht programmierbarer Taschenrechner.
- Bearbeitungsdauer: 90 Minuten.
- In der Aufgabenstellung nicht explizit definierte Symbole sind aus dem Skript zur Vorlesung übernommen.
- Bitte überprüfen Sie vor Beginn der Bearbeitung, ob Ihre Klausur alle Seiten enthält. Sie beginnt mit Seite 1 und endet mit Seite 12.

A1: Risikoaversion Sei $U'(c) > 0$ und c eine Zufallsvariable mit Realisierungen $c \neq E(c)$.

(a) Definieren Sie den Begriff „Risikoaversion“.

(b) Formulieren Sie die Ungleichung, die besagt, dass $U(c)$ (außer im Tangentialpunkt selbst) unterhalb der Tangente im Punkt $(E(c), U[E(c)])$ liegt.

(c) Illustrieren Sie anhand einer Grafik, welche Krümmungseigenschaft dafür verantworlich ist, dass die Ungleichung aus Aufagbenteil (b) gilt.

(d) Beweisen Sie, dass im in Ihrer Grafik illustrierten Fall die Definition von Risikoaversion aus Aufgabenteil (a) erfüllt ist.

(e) Liegt bei $U(c) = -e^{-Ac}$ (mit $A > 0$) Risikoaversion vor? Warum?

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

A2: Adverse Selektion $N_1 = 2.000$ Unternehmen können das Investitionsprojekt 1 mit $R_1 = 18$ und $p_1 = \frac{2}{3}$ durchführen, $N_2 = 1.000$ andere Firmen das Projekt 2 mit $R_2 = 36$ und $p_2 = \frac{1}{3}$. Im Misserfolgsfall liefern beide Projekte nichts. Beide Projekte setzen einen Kapitaleinsatz $B = 10$ voraus. Kapitalnehmer stellen Sicherheiten $S = 4$. Das Kapitalangebot ist $S(i) = 50.000i$.

(a) Berechnen Sie die Zinssätze r_1 und r_2, bei denen die beiden Gruppen aufhören, Kapital nachzufragen.

(b) Berechnen Sie $i(r_1)$ und die Renditefunktion $i(r)$ für $r > r_1$.

(c) Illustrieren Sie den Kreditmarkt in einer Grafik.

(d) Zeigen Sie, dass ein Gleichgewicht mit Markträumung und $r = 180\%$ vorliegt.

(e) Welches Allokationsproblem liegt im Marktgleichgewicht vor?

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

A3: Moral hazard 1.000 Unternehmen ohne Sicherheiten haben die versteckte Wahl zwischen zwei Projekten mit Kapitaleinsatz $B = 1$. Projekt 1 liefert mit Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{5}$ eine Auszahlung von $R_1 = \frac{7}{2}$, Projekt 2 liefert mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{5}$ eine Auszahlung von $R_2 = \frac{11}{2}$. Bei Misserfolg erwirtschaften beide Projekte keine Auszahlung. Das Kapitalangebot ist $S(i) = 4.500i$.

(a) Wie lauten die erwarteten Gewinne der Kapitalnehmer bei Durchführung von Projekt 1 bzw. Projekt 2 in Abhängigkeit vom Kreditzins r?

(b) Berechnen Sie den Zinssatz r_1, oberhalb dessen die Kapitalnehmer riskant investieren.

(c) Berechnen Sie die Rendite $i(r_1)$, die beim Zinssatz aus (b) erwirtschaftet wird. Wie hoch ist das resultierende Kapitalangebot? Wie hoch ist die Kapitalnachfrage?

(d) Erklären Sie, was für ein Typ Gleichgewicht sich einstellt.

(e) Wie hoch ist die Rendite für die Kapitalgeber, wenn nur Projekt 1 durchgeführt werden kann und der Zins $r = \frac{19}{36}$ verlangt wird? Wie sähe das Gleichgewicht bei symmetrischer Information aus?

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

A4: Optimaler Einlagenkontrakt im Diamond-Dybvig-Modell Im Diamond-Dybvig-Modell sei $R = 2$, $N = 100$ und $U(c) = 3c - \frac{c^2}{2}$.

(a) Wie lautet der Erwartungsnutzen eines Einlegers bei Zinsen von i_2 bei frühem Abheben bzw. i_3 bei spätem Abheben?

(b) Welche beiden Gleichungen müssen die langfristigen Pro-Kopf-Investitionen I erfüllen, damit früh die ungeduldige Hälfte der Einleger ausbezahlt werden kann und spät die geduldige Hälfte?

(c) Ermitteln Sie den Zusammenhang zwischen i_2 und i_3, indem Sie I aus den Gleichungen in Aufgabenteil (c) eliminieren.

(d) Ermitteln Sie durch Substituieren in die Erwartungsnutzenfunktion aus Aufgabenteil (a) und Ableiten die optimalen Werte für i_2 und i_3.

(e) Zeigen Sie, dass die Bedingung zweiter Ordnung für Nutzenmaximierung erfüllt ist.

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

A5: Bubbles Betrachten Sie eine Aktie, die eine konstante Dividende $D = 30$ zahlt, der sichere Zins ist $i = 3\%$.

(a) Wie hoch ist der Fundamentalwert F der Aktie?

(b) Leiten Sie den Zusammenhang zwischen $E_t B_{t+1}$ und B_t her, den eine Bubble erfüllen muss.

(c) Sei $B_0 < 0$. Argumentieren Sie, dass mit positiver Wahrscheinlichkeit die Ungleichung $B_t \leq 1{,}03^t B_0$ gilt.

(d) Sei $B_0 = -52{,}033$. Wie lautet die Gleichung die den Zeitpunkt t bestimmt, ab dem der Aktienkurs mit positiver Wahrscheinlichkeit negativ ist?

(e) Lösen Sie die Gleichung aus Aufgabenteil (d) nach t auf.

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

A6: Grenzen der Arbitrage Eine Aktie zahlt ab $t = 1$ eine Dividende mit konstantem Erwartungswert $E_t(D_{t+1}) = 100$. Der sichere Zins ist $i = 1\%$. Es sind $N = 200$ Aktien in Umlauf. Arbitrageure verfügen über Kapital $\bar{y} = 1.000.000$, sie können maximal $\bar{s} = 27{,}273$ Short sales durchführen.

(a) Wie hoch ist der fundamentale Kurs F der Aktie in $t = 0$? Wie hoch ist die Marktkapitalisierung bei fundamentaler Bewertung?

(b) Wie lautet die Gleichgewichtsbedingung für den Markt in Abhängigkeit von x, y und s in $t = 0$? Lösen Sie sie nach dem Gleichgewichtskurs Q auf.

(c) Wie viel investieren die Arbitrageure und wie hoch ist der Gleichgewichtskurs Q, wenn $x = 1.500.000$ ist?

(d) Welches Gleichgewicht ergibt sich bei $x = 500.000$?

(e) Welches Gleichgewicht ergibt sich bei $x = 2.500.000$?

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

Aufgabe B1: Zwei-Preis-Gleichgewicht Betrachten Sie das Adverse-Selektion-Modell mit zwei Risikoklassen ($j = 1, 2$), die jeweils über Sicherheiten S verfügen und mit Projekten ausgestattet sind, die unterschiedliche Erfolgswahrscheinlichkeiten haben (für Risikoklasse 2 kleiner als für Risikoklasse 1) und im Misserfolgsfall keine sowie im Erwartungswert gleiche Payoffs abwerfen.

(a) Wie lauten die erwarteten Gewinne der Kapitalnehmer $E(\pi_j^{KN})$ und die erwartete Rückzahlung $E(\pi_j^{KG})$ für einen Kredit an Risikoklasse j?

(b) Ermitteln Sie die Zinssätze r_j, bei denen die beiden Risikoklassen jeweils aufhören, Kapital nachzufragen. Wie lautet die Funktion $E(p_j|\, r \leq r_j)$? Erklären Sie, wie sie sich ändert, wenn r steigt.

(c) Wie hängt die erwartete Rückzahlung an die Kapitalgeber $E(\pi_j^{KG}|\ r \leq r_j) = E(p_j|\, r \leq r_j)[(1+r)B - S] + S$ vom Zins r ab? Wie lautet die Renditefunktion $i(r)$? Erklären Sie den Verlauf von $i(r)$. Argumentieren Sie insbesondere kurz (ohne Rechnungen), warum $i(r)$ das globale Maximum bei r_2 erreicht.

(d) Die Kapitalangebotsfunktion sei $S(i)$. Wie lautet die Bedingung dafür, dass das Angebot groß genug ist, um alle Projekte zu finanzieren, wenn die gesamte Rendite der Projekte an die Kapitalgeber durchgereicht wird?

(e) Welche Bedingung müssen das Kapitalangebot bei r_1 (d.h. $S[i(r_1)]$) und die Kapitalnachfrage erfüllen, damit es zu einem Zwei-Preis-Gleichgewicht kommt? Illustrieren Sie Ihre Antwort anhand einer Skizze.

(f) Wie ist der Zins $\tilde{r}_1$ definiert? Markieren Sie $\tilde{r}_1$ in der Grafik aus Aufgabenteil (e). Wie hoch ist die Restnachfrage bei $\tilde{r}_1$, wenn die Kreditvergabe bei r_1 durch $\tilde{S}$ gegeben ist? Wie hoch ist das Restangebot? Berechnen Sie den Wert von $\tilde{S}$, bei dem Restnachfrage und Restangebot gleich groß sind.

(g) Erklären Sie, warum es im Zwei-Preis-Gleichgewicht für die Kapitalgeber keinen Gewinn erbringt, entweder mit einem Zins $r < \tilde{r}_1$ außer r_1 oder mit einem Zins $r > \tilde{r}_1$ abzuweichen.

Aufgabe B2: Langfristige Kreditbeziehungen (a) Berechnen Sie mit Hilfe der Formel für die geometrische Reihe die Summe

$$\sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^t .$$

(b) Welche beiden Investitionsmöglichkeiten haben die Firmen im Modell mit langfristigen Kreditbeziehungen? Wie ist der „private Nutzen“ e zu interpretieren? Nehmen Sie an, dass $p_2 = 0$ ist. Was bedeutet das?

(c) Zeigen Sie, dass

$$p_1(R_1 - B) < (1+\rho)e$$

impliziert, dass der Kreditmarkt bei nur einmaliger Kreditvergabe nicht funktioniert.

(d) Erklären Sie, welche erwarteten Gewinne eine Firma bei unendlichem Zeithorizont realisiert, je nachdem, ob sie Projekt 1 oder Projekt 2 durchführt.

(e) Berechnen Sie den Zins r_1, bis zu dem Projekt 1 durchgeführt wird, und die Renditefunktion $i(r_1)$.

(f) Illustrieren Sie anhand der Grafik zum Marktgleichgewicht, dass bei

$$S\left(\frac{p_1 R_1 - \rho e}{B} - 1\right) \geq NB$$

ein Gleichgewicht existiert, in dem alle Firmen Projekt 1 realisieren.

(g) Welche zusätzliche Annahme an die Diskontrate ρ muss man machen, damit die Eigentümer der Firmen keinen Anreiz haben zu sparen?