**Master-Prüfung**

# „Kapitalmarkttheorie 2“

**Schwerpunktmodul „Finanzmärkte“**

**6 Kreditpunkte**

**Bearbeitungsdauer: 90 Minuten**

**WS 2019/20**

**02.03.2020**

**Prof. Dr. Lutz Arnold**

| *Bitte gut leserlich ausfüllen:* |
|---|
| **Name:** |
| **Vorname:** |
| **Matr.-nr.:** |

*Wird vom Prüfer ausgefüllt:*

| A | B1 | B2 | B3 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

## Bearbeiten Sie <u>vier der fünf</u> Aufgaben A1-A5 <u>und zwei der drei</u> Aufgaben B1-B3!

- Die Bearbeitungsdauer beträgt **90 Minuten**.
- In den Aufgaben **A1-A5** sind maximal je **5 Punkte** erreichbar.
- Machen Sie immer so weit wie möglich von den Zahlenangaben in den Aufgabenstellungen Gebrauch (keine allgemeinen Lösungen und Zwischenschritte!).
- Tragen Sie die Lösungen bitte in die Lösungsfelder auf dem Klausurbogen ein.
- In den Aufgaben **B1-B3** sind maximal je **15 Punkte** erreichbar.
- In der Aufgabenstellung nicht explizit definierte Symbole sind aus dem Foliensatz zur Vorlesung übernommen.
- Zugelassenes Hilfsmittel: nicht-programmmierbarer Taschenrechner.
- Bitte überprüfen Sie vor Beginn der Bearbeitung, ob Ihre Klausur alle Seiten enthält. Sie beginnt mit Seite 1 und endet mit Seite 13.

**A1: Allais-Paradoxon** Betrachten Sie die folgenden Lotterien (Zahlungen in der ersten Zeile, Eintrittswahrscheinlichkeiten darunter):

| 200 Euro | 100 Euro | 0 Euro |
|---|---|---|
| 8% | 90% | 2% |
| 0% | 100% | 0% |

| 200 Euro | 100 Euro | 0 Euro |
|---|---|---|
| 16% | 0% | 84% |
| 0% | 20% | 80% |

(a) Erklären Sie mit einem Satz: Was ist in der linken Tabelle an der unteren Lotterie attraktiver als an der oberen?

(b) Erklären Sie mit einem Satz: Was ist in der rechten Tabelle an der oberen Lotterie attraktiver als an der unteren?

(c) Wie lautet die Bedingung dafür, dass ein Entscheider mit Nutzenfunktion $u$ gemäß Erwartungsnutzen in der linken Tabelle die untere Lotterie vorzieht?

(d) Wie lautet die Bedingung dafür, dass er in der rechten Tabelle die obere Lotterie vorzieht?

(e) Zeigen Sie, dass das Entscheidungsverhalten aus den Aufgabenteilen (c) und (d) nicht mit der Erwartungsnutzentheorie vereinbar ist, indem Sie die Bedingungen so umformen, dass jeweils nur $10\% \cdot u(100\,\text{Euro})$ auf der einen Seite der Ungleichung steht.

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

**A2: Erster Hauptsatz der Wohlfahrtstheorie in der CCM-Ökonomie**

(a) Formulieren Sie den ersten Hauptsatz der Wohlfahrtstheorie für die CCM-Ökonomie (1st Welfare Theorem with CCMs).

(b) Sei $(\mathbf{c^{i'}})_{i=1}^{I}$ eine Pareto-bessere Allokation als die gleichgewichtige. Begründen Sie: $\mathbf{qc^{i'}} \geq \mathbf{qc}^i$ für alle $i$. Begründen Sie: Die Ungleichung ist für mindestens ein $i$ strikt.

(c) Was folgt aus den Ungleichungen in Aufgabenteil (b) für die aufsummierten Kosten der Konsumvektoren?

(d) Was folgt aus Machbarkeit der Allokation aus Aufgabenteil (b) und der Definition des Gleichgewichts in Aufgabenteil (a) für die jeweiligen aufsummierten Kosten der Konsumvektoren?

(e) Beweisen Sie den Satz aus Aufgabenteil (a).

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

**A3: Stochastischer Diskontfaktor (SDF)** Sei $S = 2$, $\pi_1 = \pi_2 = \frac{1}{2}$, $u^i(c) = \ln c$ und $\beta = 1$.

(a) Wie lautet $i$'s SDF?

(b) Sei $c_0^i = 9$, $c_1^i = 1$ und ${}^i c_2 = 9$. Wie lautet dann $i$'s SDF in den beiden Zuständen?

(c) Betrachten Sie zwei Assets 1 und 2 mit den Payoff-Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie mit Hilfe des SDF aus Aufgabenteil (b) die Preise $p_1$ und $p_2$ der beiden Assets.

(d) Wie hoch sind die erwarteten Payoffs der beiden Assets? Warum ist Asset 2 teurer als Asset 1?

(e) Wie ändert sich der SDF, wenn die Nutzenfunktion stattdessen $u^i(c) = \ln\left(c^2\right)$ ist? Begründen Sie Ihre Antwort rechnerisch.

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

**A4: Finanzmarktvollständigkeit** Sei $S = 2$. Betrachten Sie zwei Assets 1 und 2 mit Payoff-Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ bzw $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie das Portfolio $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, das den Payoff-Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ erzeugt.

(b) Berechnen Sie das Portfolio $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, das den Payoff-Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ erzeugt.

(c) Seien die Asset-Preise $p_1 = \frac{7}{4}$ und $p_2 = \frac{3}{2}$. Berechnen Sie die Zustandspreise $\tilde{p}_1$ und $\tilde{p}_2$.

(d) Berechnen Sie aus den Preisen in Aufgabenteil (c) den sicheren Zinssatz.

(e) Berechnen Sie den Preis eines Assets mit Payoff-Vektor $\begin{pmatrix} 8 \\ 24 \end{pmatrix}$

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

**A5: Gesetz iterierter Erwartungen** Es gebe $S = 4$ Umweltzustände und drei Zeitpunkte $t = 1, 2, 3$. Die Umweltzustände treten mit Wahrscheinlichkeiten von jeweils $\pi_1 = \pi_2 = 20\%$ und $\pi_3 = \pi_4 = 30\%$ ein. Eine Zufallsvariable $x$ nimmt die Werte $x_1 = 50$, $x_2 = 100$, $x_3 = 200$ bzw. $x_4 = 300$ an. In $t = 1$ sind alle Zustände in der Informationsmenge $\sigma = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$. In $t = 2$ gibt es zwei Informationsmengen: $\sigma'_1 = \{1,\ 2\}$ und $\sigma'_2 = \{3,\ 4\}$. In $t = 3$ hat sich die Unsicherheit aufgelöst.

(a) Stellen Sie die Angaben des oben beschriebenen Beispiels grafisch dar.

(b) Wie hoch ist $E(x|\,\sigma)$?

(c) Wie hoch sind in $t = 2$ in $\sigma'_1$ die konditionalen Wahrscheinlichkeiten für die 4 Umweltzustände? Wie hoch sind sie in $t = 2$ in $\sigma'_2$?

(d) Wie hoch ist $E(x|\,\sigma'_j)$ für die zwei Informationsmengen in $t = 2$?

(e) Berechnen Sie $E[E(x|\,\sigma')|\,\sigma]$, und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem aus Aufgabenteil (b).

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

**Aufgabe B1: Gleichgewicht mit vollständiger Menge von ASs**

(a) Wie lauten die Budgetrestriktionen in der Ökonomie mit einer vollständigen Menge von ASs?

(b) Definieren Sie ein Gleichgewicht für die Ökonomie mit einer vollständigen Menge von ASs (ECAS).

(c) Formulieren Sie das Theorem, das die „Äquivalenz" zwischen einem ECCM $((\mathbf{c}^{i*})_{i=1}^{I}, \mathbf{q})$ und einem ECAS herstellt.

(d) Definieren Sie $B^i$ und $B^{i\prime}$. Erklären Sie, warum $\mathbf{c}^{i*} \in B^{i\prime} \subset B^i$ impliziert, dass Konsument $i$ bei den ECAS-Preisen $\mathbf{c}^{i*}$ wählt.

(e) Beweisen Sie: $\mathbf{c}^{i*} \in B^{i\prime}$.

(f) Beweisen Sie: $B^{i\prime} \subseteq B^i$.

(g) Beweisen Sie Gütermarkträumung und Räumung der AS-Märkte (was den Beweis des Theorems aus Aufgabenteil (c) komplettiert).

(h) Definieren Sie den Begriff Finanzmarktvollständigkeit. Warum liegt mit einer vollständigen Menge von ASs Finanzmarktvollständigkeit vor?

**Aufgabe B2: CAPM**

(a) Was wird im CAPM über die Nutzenfunktion der Individuen angenommen? Welche Annahme sichert, dass die Grenznutzen positiv sind?

(b) Definieren Sie die Rendite $r_s^j$ von Aktie $j$ und die Marktrendite $r_s^M$. Formulieren Sie damit die CAPM-Gleichung.

(c) Unter den gemachten Annahmen gilt in einem ESME $\tilde{p}_s = \pi_s(a - by_s)$ mit Konstanten $a$ und $b$. Betrachten Sie einen riskanten Payoff $\alpha_s$. Definieren Sie den Wert $v^\alpha$ dieses Payoffs aus Sicht von $t$ und die Rendite $r_s^\alpha$.

(d) Beweisen Sie:

$$E[(1 + r^\alpha)(1 + r^M)] = \sigma^{\alpha M} + (1 + Er^\alpha)(1 + Er^M)$$

sowie mit Hilfe der Formel für $v^\alpha$ aus Aufgabenteil (c) und der Formel für $\tilde{p}_s$:

$$1 = (1 + Er^\alpha)\left[a - bv^M\left(1 + Er^M\right)\right] - bv^M \sigma^{\alpha M}.$$

(e) Leiten Sie die CAPM-Formel aus Aufgabenteil (b) her, indem Sie die Formel aus Aufgabenteil (d) auf ein sicheres Asset, auf eine Aktie $j$ und auf den Markt anwenden.

(f) Erläutern Sie, warum Assets mit hohem $\beta^j$ eine hohe erwartete Rendite haben.

**Aufgabe B3: Fundamentale Asset-pricing-Gleichung im Mehr-Perioden-Modell**

Im Modell mit Zeithorizont $0, 1, \ldots, T$ beträgt der intertemporale Nutzen ab $t$:

$$U_{s,t}^i(\mathbf{c}_t^i, \ldots, \mathbf{c}_T^i) = \sum_{\tau=t}^{T} (\beta^i)^{\tau - t} E_t\left[u^i(c_\tau^i)\right],$$

und die Budgetrestriktion für $t$ lautet:

$$c_{s,t}^i + \sum_{k=1}^{K} p_{sk,t}\left(z_{sk,t}^i - z_{sk,t-1}^i\right) \leq y_{s,t}^i + \sum_{k=1}^{K} a_{sk,t} z_{sk,t-1}^i.$$

(a) Leiten Sie die Gleichung für $p_{sk,t}$ her, die sich aus Nutzenmaximierung ergibt. Nehmen Sie dazu an, dass Individuum $i$ seine Asset-Haltung einmalig um $dz_{sk,t} \neq 0$ ändert.

(b) Welche zusätzlichen Annahmen erlauben es, die Gleichung aus Aufgabenteil (a) als fundamentale Asset-pricing-Gleichung zu interpretieren? Definieren Sie dabei den stochastischen Diskontfaktor $M_{t,t+1,s}$, und interpretieren Sie ihn: In welchen Zuständen $s$ ist er hoch, in welchen niedrig?

(c) Unter welchen Annahmen folgt der Asset-Preis einem Random walk (d.h. $p_{k,t} = E_t(p_{k,t+1})$)? Begründen Sie Ihre Antwort mit der fundamentalen Asset-pricing-Gleichung aus Aufgabenteil (b).

(d) Berechnen Sie aus der fundamentalen Asset-pricing-Gleichung unter der Annahme von Risikoneutralität Schritt für Schritt den Fundamentalwert des Assets $p_{k,t}$.