Master-Prüfung

„Kapitalmarkttheorie 2“

Schwerpunktmodul „Finanzmärkte“

6 Kreditpunkte

Bearbeitungsdauer: 90 Minuten

WS 2018/19

04.03.2019

Prof. Dr. Lutz Arnold

Bitte gut leserlich ausfüllen:
Name:
Vorname:
Matr.-nr.:

Wird vom Prüfer ausgefüllt:

A	B1	B2	B3	$\sum$

Bearbeiten Sie vier der fünf Aufgaben A1-A5 und zwei der drei Aufgaben B1-B3!

- Die Bearbeitungsdauer beträgt **90 Minuten**.
- In den Aufgaben **A1-A5** sind maximal je **5 Punkte** erreichbar.
- Machen Sie immer so weit wie möglich von den Zahlenangaben in den Aufgabenstellungen Gebrauch (keine allgemeinen Lösungen und Zwischenschritte!).
- Tragen Sie die Lösungen bitte in die Lösungsfelder auf dem Klausurbogen ein.
- In den Aufgaben **B1-B3** sind maximal je **15 Punkte** erreichbar.
- In der Aufgabenstellung nicht explizit definierte Symbole sind aus dem Foliensatz zur Vorlesung übernommen.
- Zugelassenes Hilfsmittel: nicht-programmmierbarer Taschenrechner.
- Bitte überprüfen Sie vor Beginn der Bearbeitung, ob Ihre Klausur alle Seiten enthält. Sie beginnt mit Seite 1 und endet mit Seite 13.

A1: St.-Petersburg-Paradoxon Es wird Ihnen ein Spiel mit einem fairen Würfel vorgeschlagen. Der Würfel wird solange geworfen, bis zum ersten Mal eine 5 fällt, dann endet das Spiel. Passiert das beim ersten Wurf, dann erhalten Sie € 24. Passiert das beim zweiten Wurf, erhalten Sie € 144. Beim dritten Wurf € 864. Beim n-ten Wurf € $4 \cdot 6^n$.

(a) Wie hoch ist der erwartete Gewinn aus der Teilnahme an dem Spiel?

(b) Wieviel wäre ein risikoneutraler Entscheider für die Teilnahme an dem Spiel zu zahlen bereit?

(c) Wie lautet der Erwartungsnutzen für einen Spieler mit logarithmischer Nutzenfunktion (als Summenformel)?

(d) Verwenden Sie die Formel $\sum_{n=1}^{\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}$, um den Erwartungsnutzen aus Aufgabenteil (c) zu berechnen.

(e) Erklären Sie mit einem Satz, was das St.-Petersburg-Paradoxon ist und inwiefern Aufgabenteil (d) eine Lösung davon darstellt.

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

A2: Fundamentale Asset-pricing-Gleichung Im Zwei-Perioden-Modell (ohne Wiederverkaufspreise) sei $S = 4$. Alle Zustände sind gleich wahrscheinlich: $\pi_s = \frac{1}{4}$ für $s = 1, 2, 3, 4$. Die Nutzenfunktion eines Konsumenten sei $u(c) = 2c^{\frac{1}{2}}$, sein subjektiver Diskontfaktor ist $\beta = 1$. Im Gleichgewicht konsumiert er $c_t = 9$ und $c_{t+1,s}$ gemäß der unten stehenden Tabelle.

(a) Wie lautet der stochastische Diskontfaktor (SDF) $M_{t,t+1,s}$ für Zustand s in Abhängigkeit von den Variablen c_t und $c_{t+1,s}$?

(b) Tragen Sie in die unten stehende Tabelle den Wert von $M_{t,t+1,s}$ in den einzelnen Umweltzuständen ein.

(c) Wie lautet allgemein (ohne Herleitung) die fundamentale Asset-pricing-Gleichung für ein riskantes Asset?

(d) In den letzten beiden Zeilen stehen die Payoffs a_{sk} von zwei Assets 1 und 2. Berechnen Sie die Preise p_k, $k = 1, 2$, der beiden Assets.

(e) Welcher allgemeinere Sachverhalt spiegelt sich in $p_2 > p_1$ wider?

(a)

(b)

s	1	2	3	4
$c_{t+1,s}$	1	4	16	25
$M_{t,t+1,s}$				
a_{s1}	20	40	60	80
a_{s2}	80	60	40	20

(c)

(d)

(e)

A3: Komplettierung des Finanzmarkts mit Optionen Sei $S = 3$. Betrachten Sie ein Asset 1 mit Payoff-Vektor $(2, 4, 6)$.

(a) Wie lauten die Payoff-Vektoren für Call-Optionen auf das Asset mit strike prices 2 bzw. 4?

(b) Wählen Sie die beiden Optionen aus Aufgabenteil (a) als Assets 2 und 3. Stellen Sie das lineare Gleichungssystem auf, das die Payoffs aus Portfolios (z_1, z_2, z_3) angibt.

(c) Berechnen Sie das Portfolio, mit dem der Payoff-Vektor $(1, 0, 0)$ generiert wird.

(d) Berechnen Sie die Portfolios, mit denen die Payoff-Vektoren $(0, 1, 0)$ bzw. $(0, 0, 1)$ generiert werden.

(e) Welcher allgemeinere Sachverhalt spiegelt sich darin wider, dass es hier Portfolios gibt, die die Aufgabenteile (c) und (d) lösen?

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

A4: CAPM Im CAPM gilt für ein riskantes Einkommen α mit Rendite r_α:

$$1 = \left(1 + Er_{t+1}^{\alpha}\right) \left[a - bv_t^M \left(1 + Er_{t+1}^M\right)\right] - bv_t^M \sigma^{\alpha M}.$$

(a) Definieren Sie v_t^M und r_{t+1}^M.

(b) Wenden Sie die angegebene Gleichung auf ein sicheres Asset mit Payoff 1 an.

(c) Wenden Sie nun die angegebene Gleichung auf ein riskantes Asset j und auf den Markt an. Benutzen Sie Ihr Ergebnis aus Aufgabenteil (b), um jeweils den Ausdruck in eckigen Klammern zu eliminieren.

(d) Stellen Sie die Gleichungen aus Aufgabenteil (c) so um, dass die CAPM-Formel resultiert.

(e) Welche Assets liefern laut CAPM hohe Risikoprämien? Warum?

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

A5: Gesetz iterierter Erwartungen Es gebe $S = 5$ Umweltzustände und drei Zeitpunkte $t = 1, 2, 3$. Die Umweltzustände treten mit Wahrscheinlichkeiten von jeweils $\pi_s = 20\%$ ein. Eine Zufallsvariable x nimmt die Werte $x_1 = 10$, $x_2 = 20$, $x_3 = 30$, $x_4 = 40$ bzw. $x_5 = 50$ an. In $t = 1$ sind alle Zustände in der Informationsmenge $\sigma = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. In $t = 2$ gibt es drei Informationsmengen: $\sigma'_1 = \{1, 2\}$ und $\sigma'_2 = \{3, 4\}$ und $\sigma'_3 = \{5\}$. In $t = 3$ hat sich die Unsicherheit aufgelöst.

(a) Stellen Sie die Angaben des oben beschriebenen Beispiels grafisch dar.

(b) Wie hoch ist $E(x|\,\sigma)$?

(c) Wie hoch ist $E(x|\,\sigma'_j)$ für die drei Infomationsmengen in $t = 2$?

(d) Berechnen Sie $E[E(x|\,\sigma')|\,\sigma]$.

(e) Erläutern Sie den allgemeinen Sachverhalt, den dieses Beispiel illustriert.

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

Aufgabe B1: Erster Hauptsatz der Wohlfahrtstheorie in der CCM-Ökonomie

Betrachten Sie die Ökonomie mit S (≥ 2) Umweltzuständen und kontingenten Gütermärkten.

(a) Erklären Sie, was ein kontingenter Gütermarkt ist.

(b) Definieren Sie machbare („feasible“) Allokationen $(\mathbf{c}^i)_{i=1}^I$. Definieren Sie Pareto-Optimalität.

(c) Wie lautet i's Budgetbeschränkung? Definieren Sie ein Gleichgewicht mit kontingenten Gütermärkten (ECCM).

(d) Formulieren Sie den ersten Hauptsatz der Wohlfahrtstheorie für die CCM-Ökonomie. Beweisen Sie ihn. Nehmen Sie dazu an, dass es eine Pareto-superiore machbare Allokation gibt; zeigen Sie, dass diese Allokation zu Gleichgewichtspreisen teurer ist; und führen Sie das zu einem Widerspruch.

(e) Formulieren Sie das Theorem, das den Zusammenhang zwischen einem Gleichgewicht mit vollständiger Menge von Arrow securities (ECAS) und einem ECCM herstellt (ohne vorher ein ECAS zu definieren). Erklären Sie, warum das Theorem gilt (ohne es formal zu beweisen), indem Sie beschreiben, wie sich ein Konsument Konsum in einem bestimmten Zustand s beschaffen kann.

Aufgabe B2: Stock market economy (SME)

(a) Wie lauten die Budgetrestriktionen in der SME?

(b) Definieren Sie ein Gleichgewicht für die SME (ein ESME).

(c) Formulieren Sie das Theorem, das den Zusammenhang zwischen einem ESME mit $\boldsymbol{\theta}^i = \bar{\boldsymbol{\theta}}^i$ und einem Gleichgewicht für die Tauschökonomie mit Arrow securities (ECAS) und Anfangsausstattungen

$$y^i_{t+1,s} = \sum_{j=1}^{J} \bar{\theta}^{ij} \tilde{y}^j_{t+1,s}, \quad s = 1, \ldots, S, \ i = 1, \ldots, I,$$

herstellt.

(d) Definieren Sie die Mengen $B^{i\prime}$ und $B^{i\prime\prime\prime}$, und erläutern Sie, was

$$\mathbf{c}^{i*} \in B^{i\prime\prime\prime} \subseteq B^{i\prime}$$

bedeutet.

(e) Beweisen Sie die Gültigkeit der Formel aus Aufgabenteil (d). Benutzen Sie im zweiten Teil das Portfolio $\tilde{\mathbf{z}}^{i\prime}$ mit

$$\tilde{z}^{i\prime}_s = \tilde{z}^i_s + \sum_{j=1}^{J} (\theta^{ij} - \bar{\theta}^{ij}) \tilde{y}^j_{t+1,s}, \quad s = 1, \ldots, S.$$

(f) Komplettieren Sie den Beweis des Theorems aus Aufgabenteil (c), indem Sie Markträumung begründen.

(g) Argumentieren Sie (ohne Rechnungen) anhand der Formel

$$d\tilde{z}^i_s = -\sum_{j=1}^{J} \tilde{y}^j_{t+1,s} d\theta^{ij},$$

dass es auch ESMEs mit Aktienhandel gibt. Welche Bedingung müssen die $d\theta^{ij}$'s erfüllen?

Aufgabe B3: Fundamentale Asset-pricing-Gleichung im Mehr-Perioden-Modell

Im Modell mit Zeithorizont $0, 1, \ldots, T$ lautet die Budgetrestriktion für die Periode t:

$$c^i_{s,t} + \sum_{k=1}^{K} p_{sk,t} \left(z^i_{sk,t} - z^i_{sk,t-1} \right) \leq y^i_{s,t} + \sum_{k=1}^{K} a_{sk,t} z^i_{sk,t-1}.$$

(a) Leiten Sie die Gleichung für $p_{sk,t}$ her, die sich aus Nutzenmaximierung ergibt. Nehmen Sie dazu an, dass Individuum i seine Asset-Haltung einmalig um $dz_{sk,t} \neq 0$ ändert.

(b) Welche zusätzlichen Annahmen erlauben es, die Gleichung aus Aufgabenteil (a) als fundamentale Asset-pricing-Gleichung zu interpretieren? Definieren Sie dabei den stochastischen Diskontfaktor $M_{t,t+1,s}$, und interpretieren Sie ihn: In welchen Zuständen s ist er hoch, in welchen niedrig?

(c) Unter welchen Annahmen folgt der Asset-Preis einem Random walk (d.h. $p_{k,t} = E_t(p_{k,t+1})$)? Begründen Sie Ihre Antwort mit der fundamentalen Asset-pricing-Gleichung aus Aufgabenteil (b).

(d) Leiten Sie aus der fundamentalen Asset-pricing-Gleichung die Formel

$$p_t = \frac{E_t(p_{t+1} + a_{t+1})}{1 + r_{t+1}} + \sigma_{M,p+a}$$

her.