Master-Prüfung

„Kapitalmarkttheorie 2“

Schwerpunktmodul „Finanzmärkte“

6 Kreditpunkte

Bearbeitungsdauer: 90 Minuten

WS 2017/18

05.03.2018

Prof. Dr. Lutz Arnold

Bitte gut leserlich ausfüllen:
Name:
Vorname:
Matr.-nr.:

Wird vom Prüfer ausgefüllt:

A	B1	B2	B3	$\sum$

Bearbeiten Sie <u>vier der fünf</u> Aufgaben A1-A5 <u>und zwei der drei</u> Aufgaben B1-B3!

- Die Bearbeitungsdauer beträgt **90 Minuten**.
- In den Aufgaben **A1-A5** sind maximal je **5 Punkte** erreichbar.
- Machen Sie immer so weit wie möglich von den Zahlenangaben in den Aufgabenstellungen Gebrauch (keine allgemeinen Lösungen und Zwischenschritte!).
- Tragen Sie die Lösungen bitte in die Lösungsfelder auf dem Klausurbogen ein.
- In den Aufgaben **B1-B3** sind maximal je **15 Punkte** erreichbar.
- In der Aufgabenstellung nicht explizit definierte Symbole sind aus dem Foliensatz zur Vorlesung übernommen.
- Zugelassenes Hilfsmittel: nicht-programmmierbarer Taschenrechner.
- Bitte überprüfen Sie vor Beginn der Bearbeitung, ob Ihre Klausur alle Seiten enthält. Sie beginnt mit Seite 1 und endet mit Seite 13.

A1: Edgeworth-Box Betrachten Sie eine Zwei-Perioden-Ökonomie mit zwei möglichen Umweltzuständen in $t+1$ sowie ohne Konsum und Ausstattungen in t. Die eine Hälfte der Konsumenten hat Ausstattungen $(y^1_{t+1,1}, y^1_{t+1,2}) = (0{,}25;\ 0{,}75)$, die andere Hälfte $(y^2_{t+1,1}, y^2_{t+1,2}) = (0{,}75;\ 0{,}25)$. Beide haben die gleiche Nutzenfunktion. (Hinweis: Beschriften Sie Ihre Grafiken vollständig und begründen Sie kurz Ihre Antworten.)

(a) Zeichnen Sie eine Edgeworth-Box für diese Ökonomie und darin den Ausstattungspunkt.

(b) Illustrieren Sie mit Indifferenzkurven, dass der Ausstattungspunkt keine Pareto-optimale Allokation ist. Skizzieren Sie die Kontraktkurve und geben Sie an, aus welcher Bedingung die Kontraktkurve ermittelt wird und was sie darstellt.

(c) Welches Marktgleichgewicht ergibt sich, wenn Handel nur auf Spot-Märkten möglich ist? Woran erkennt man, dass nicht Pareto-Optimalität vorliegt?

(d) Illustrieren Sie in der Edgeworth-Box den Gleichgewichtspunkt, der sich ausgehend von der Anfangsausstattung ergibt, wenn Terminmärkte (CCMs) existieren. Zeichnen Sie auch die Preisgerade ein, und illustrieren Sie, dass das Gleichgewicht Pareto-optimal ist.

(e) Individuen mit welcher Risikoeinstellung profitieren am stärksten vom Vorhandensein von CCMs?

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

A2: Allais-Paradoxon Betrachten Sie die folgenden Lotterien (Zahlungen in der ersten Zeile, Eintrittswahrscheinlichkeiten darunter):

1000 Euro	100 Euro	0 Euro
5%	90%	5%
0%	100%	0%

1000 Euro	100 Euro	0 Euro
5%	10%	85%
0%	20%	80%

(a) Wie lautet die Bedingung dafür, dass ein Entscheider mit Nutzenfunktion u gemäß Erwartungsnutzen in der linken Tabelle die obere Lotterie vorzieht?

(b) Wie lautet die Bedingung dafür, dass er in der rechten Tabelle die untere Lotterie vorzieht?

(c) Formen Sie die Ungleichungen aus den Aufgabenteilen (a) und (b) so um, dass jeweils nur $10\% \cdot u(100\,\text{Euro})$ auf der einen Seite der Ungleichung steht.

(d) Warum ist es „paradox", wenn ein Entscheider in der linken Tabelle die obere Lotterie vorzieht und in der rechten Tabelle die untere? Welches der vier Axiome der Erwartungsnutzentheorie ist in diesem Beispiel verletzt?

(e) Welche der Lotterien in der linken Tabelle würde ein rationaler risikoneutraler Entscheider wählen? Welche Lotterie in der rechten Tabelle? Nennen Sie zwei Erklärungen für das Allais-Paradoxon.

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

A3: ECCM und Preisnormierung

(a) Wie lautet die Budgetbeschränkung für Konsument i in der CCM-Ökonomie mit S (≥ 2) Umweltzuständen?

(b) Definieren Sie ein ECCM.

(c) Formulieren Sie das Theorem, das besagt, dass ein CCM-Preis beliebig gewählt werden kann („irrelevance of price normalization").

(d) Beweisen Sie das Theorem aus Aufgabenteil (c).

(e) Begründen Sie, warum die Budgetbeschränkung jedes Konsumenten i im ECCM als Gleichheit gilt.

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

A4: Finanzmarktvollständigkeit

Betrachten Sie einen Finanzmarkt mit zwei Umweltzuständen und zwei Assets k mit den Payoff-Vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und dazugehörigen gleichgewichtigen Preisen 2 bzw. 1,2.

(a) Ist die Bedingung der Finanzmarktvollständigkeit erfüllt? Sind die Payoffs der beiden Assets linear abhängig (begründen Sie Ihre Antwort grafisch)?

(b) Wie lautet die Payoff-Matrix $\mathbf{A}$? Wie lautet die Gleichung, die einem Portfolio $\mathbf{z}$ einen Payoff-Vektor $\mathbf{x}$ zuordnet?

(c) Berechnen Sie die Portfolios $\mathbf{z}$, mit denen die Payoff-Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ erzielt werden. Illustrieren Sie das Portfolio, das den ersten Payoff-Vektor generiert, in der Grafik aus Teilaufgabe (a).

(d) Was kosten die Portfolios aus Aufgabenteil (c)?

(e) Was kostet gemäß Aufgabenteil (d) und der Bepreisungsformel $p_k = \sum_{s=1}^{2} \tilde{p}_s a_{sk}$ ein Asset k mit Payoffs a_{1k} und a_{2k}? Ist ein Asset k mit Payoffs $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $p_k = 3{,}04$ korrekt (arbitragefrei) bepreist?

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

A5: Anwendungen der fundamentalen Asset-pricing-Gleichungen (Spezialfall Random walk)

(a) Leiten Sie aus der fundamentalen Asset-pricing-Gleichung für ein riskantes Asset die Random-walk-Formel für den Spzeialfall Risikoneutralität her. Welche weiteren Annahmen müssen Sie dafür treffen?

(b) Zeigen Sie, dass $p_t = p_0 + \sum_{\tau=1}^{t} \xi_\tau$ gilt.

(c) Angenommen, ξ_t ist i.i.d. Bestimmen Sie $E_0(p_t)$ für alle t.

(d) Definieren Sie und bestimmen Sie $Var_0(p_t)$ für alle t.

(e) Wie ändert sich die Varianz mit t? Was bedeutet das für die Prognose des zukünftigen Assetkurses?

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

Aufgabe B1: Die fundamentalen Asset-Pricing-Gleichungen in der Zwei-Zustände-Ökonomie

Betrachten Sie die Ökonomie mit zwei Umweltzuständen sowie einem riskanten Asset mit den Payoffs ($a_{t+1,1} =$) 1 und ($a_{t+1,2} =$) 0 in den beiden Zuständen und einem sicheren Asset mit Payoff 1. Die Nutzenfunktion lautet

$$U^i(c_t^i, c_{t+1,1}^i, c_{t+1,2}^i) = u^i(c_t^i) + \beta^i \sum_{s=1}^{2} \pi_s u^i(c_{t+1,s}^i).$$

(a) Wie lauten die Budgetbeschränkungen von Individuum i?

(b) Substitutieren Sie die Konsumniveaus aus den Budgetbeschränkungen in die Nutzenfunktion.

(c) Leiten Sie durch Ableiten und Nullsetzen die notwendigen Optimalitätsbedingungen her, und lösen Sie sie nach p_t bzw. nach $1/(1 + r_{t+1})$ auf.

(d) Berechnen Sie die Grenzrate der Substitution $MRS_{t,t+1,s}^i$ zwischen Konsum in t und in Zustand s.

(e) Argumentieren Sie (ohne Rechnungen), dass die Grenzraten der Substitution für unterschiedliche Individuen i und i' gleich sind.

(f) Definieren Sie den stochastischen Diskontfaktor $M_{t,t+1}$. Begründen Sie, warum er eindeutig definiert ist (d.h. nicht von i abhängt).

(g) Benutzen Sie Ihre Definition aus Aufgabenteil (f), um die Optimalitätsbedingungen aus Aufgabenteil (c) als die fundamentalen Asset-pricing-Gleichungen auszudrücken. Begründen Sie aus Ihren Antworten zu den Aufgabenteilen (c) und (f), warum diese Gleichungen gelten. Interpretieren Sie die Gleichungen ökonomisch.

(h) Beweisen Sie:

$$p_t = \frac{E_t(p_{t+1} + a_{t+1})}{1 + r_{t+1}} + \sigma_{M,p+a}.$$

Aufgabe B2: Modigliani-Miller-Theorem

(a) Wie lauten die Budgetrestriktionen in der Ökonomie mit Firmen, die sowohl durch Aktien als auch durch Schuldtitel finanziert sind?

(b) Erklären Sie mit einem Satz (ohne Formeln) die Definition eines Gleichgewichts (ESDE) für diese Ökonomie.

Im Folgenden ist das Modigliani-Miller Theorem zu beweisen:

> **Theorem:** *Let* $((\mathbf{c}^{i*}, \tilde{\mathbf{z}}^{i*}, \boldsymbol{\theta}^{i*})_{i=1}^{I}, (\tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{v}))$ *be an ESME. Let*
>
> $$p_b = \sum_{s=1}^{S} \tilde{p}_s$$
>
> *and*
>
> $$b_t^{i*} = \sum_{j=1}^{J} \theta^{ij*} b_t^j, \quad i = 1, \ldots, I.$$
>
> *Then* $((\mathbf{c}^{i*}, \tilde{\mathbf{z}}^{i*}, \boldsymbol{\theta}^{i*}, b_t^{i*})_{i=1}^{I}, \tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{v}, p_b)$ *is an ESDE.*

(c) Definieren Sie $B^{i'''}$ und $B^{i''''}$, und erläutern Sie die Formel $\mathbf{c}^{i*} \in B^{i''''} \subseteq B^{i'''}$.

(d) Beweisen Sie $\mathbf{c}^{i*} \in B^{i''''}$.

(e) Beweisen Sie $B^{i''''} \subseteq B^{i'''}$ (benutzen Sie dabei $\tilde{z}_s^{i\prime} = \tilde{z}_s^i + b_t^i - \sum_{j=1}^J \theta^{ij} b_t^j$).

(f) Komplettieren Sie den Beweis, indem Sie Räumung aller Märkte beweisen.

Aufgabe B3: CAPM

(a) Was wird im CAPM über die Nutzenfunktion der Individuen angenommen? Welche Annahme sichert, dass die Grenznutzen positiv sind?

(b) Definieren Sie die Rendite $r_{t+1,s}^j$ von Aktie j und die Marktrendite $r_{t+1,s}^M$. Formulieren Sie damit die CAPM-Gleichung.

(c) Unter den gemachten Annahmen gilt in einem ESME $\tilde{p}_s = \pi_s(a - by_{t+1,s})$ mit Konstanten a und b. Betrachten Sie einen riskanten Payoff $\alpha_{t+1,s}$. Definieren Sie den Wert v_t^α dieses Payoffs aus Sicht von t und die Rendite $r_{t+1,s}^\alpha$.

(d) Beweisen Sie:

$$E[(1 + r_{t+1}^\alpha)(1 + r_{t+1}^M)] = \sigma^{\alpha M} + (1 + Er_{t+1}^\alpha)(1 + Er_{t+1}^M)$$

sowie mit Hilfe der Formel für $\tilde{p}_s$:

$$1 = \left(1 + Er_{t+1}^\alpha\right) \left[a - bv_t^M \left(1 + Er_{t+1}^M\right)\right] - bv_t^M \sigma^{\alpha M}.$$

(e) Leiten Sie die CAPM-Formel aus Aufgabenteil (b) her, indem Sie die Formel aus Aufgabenteil (d) auf ein sicheres Asset, auf eine Aktie j und auf den Markt anwenden.

(f) Erläutern Sie, warum Assets mit hohem β^j eine hohe erwartete Rendite haben.