Master-Kursprüfung

„Kapitalmarkttheorie 2“

Schwerpunktmodul „Finanzmärkte“

6 Kreditpunkte

Bearbeitungsdauer: 90 Minuten

SS 2017

21.08.2017

Prof. Dr. Lutz Arnold

Bitte gut leserlich ausfüllen:
Name:
Vorname:
Matr.-nr.:

Wird vom Prüfer ausgefüllt:

A	B1	B2	B3	$\sum$

Bearbeiten Sie vier der fünf Aufgaben A1-A5 und zwei der drei Aufgaben B1-B3!

- Die Bearbeitungsdauer beträgt **90 Minuten**.
- In den Aufgaben **A1-A5** sind maximal je **5 Punkte** erreichbar.
- Machen Sie immer so weit wie möglich von den Zahlenangaben in den Aufgabenstellungen Gebrauch (keine allgemeinen Lösungen und Zwischenschritte!).
- Tragen Sie die Lösungen bitte in die Lösungsfelder auf dem Klausurbogen ein.
- In den Aufgaben **B1-B3** sind maximal je **15 Punkte** erreichbar.
- In der Aufgabenstellung nicht explizit definierte Symbole sind aus dem Foliensatz zur Vorlesung übernommen.
- Zugelassenes Hilfsmittel: nicht-programmmierbarer Taschenrechner.
- Bitte überprüfen Sie vor Beginn der Bearbeitung, ob Ihre Klausur alle Seiten enthält. Sie beginnt mit Seite 1 und endet mit Seite 13.

A1: Erster Hauptsatz der Wohlfahrtstheorie in der CCM-Ökonomie

Betrachten Sie die Ökonomie mit S (≥ 2) Umweltzuständen und kontingenten Gütermärkten.

(a) Was wird in diesem Modell über die Nutzenfunktion der Individuen angenommen? Welche Variablen sind in diesem Modell endogen und welche exogen? Erklären Sie in einem Satz, was ein „kontingenter Gütermarkt“ ist.

(b) Definieren Sie machbare („feasible“) Allokationen $(\mathbf{c}^i)_{i=1}^I$.

(c) Definieren Sie Pareto-Optimalität.

(d) Wie lautet i's Budgetbeschränkung? Definieren Sie ein Gleichgewicht mit kontingenten Gütermärkten (ECCM).

(e) Formulieren Sie den ersten Hauptsatz der Wohlfahrtstheorie für die CCM-Ökonomie. Erläutern Sie die Beweisidee mit Hilfe einer geeigneten Abbildung (ohne Beweis).

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

A2: Anwendungen der fundamentalen Asset–pricing–Gleichungen

Betrachten Sie ein riskantes Asset mit den Payoffs Eins im Zusatand $s = 1$ und Null in $s = 2$.

(a) Geben Sie (ohne Herleitung) die fundamentalen Asset–pricing–Gleichungen für ein sicheres und ein riskantes Asset an.

(b) Geben Sie die Gleichung für die Kovarianz $\sigma_{M,p+a}$ zwischen dem Payoff des riskanten Assets und dem stochastischen Diskontfaktor (SDF) an.

(c) Leiten Sie den Preis des riskanten Assets in Abhängigkeit von seinem erwarteten Payoff, dem sicheren Zins und der Kovarianz aus Aufgabenteil (b) her.

(d) Normieren Sie den Preis des riskanten Assets auf eins ($p_t = 1$), und formulieren Sie den Zusammenhang aus Aufgabenteil (c) als eine Aussage über die erwartete Rendite $E_t(R_{t+1})$ des riskanten Assets um.

(e) Definieren Sie das beta des riskanten Assets, und formulieren Sie $E_t(R_{t+1})$ in Abhängigkeit von beta aus.

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

A3: St.-Petersburg-Paradoxon

Eine Lotterie zahlt 2^k Euro aus, wenn eine faire Münze erstmals nach dem k-ten Wurf „Kopf " liefert.

(a) Berechnen Sie den Erwartungswert dieser Lotterie.

(b) Wie hoch ist die faire Teilnahmegebühr bei diesem Spiel für einen risikoneutralen Akteur? Warum handelt es sich dabei um ein paradoxes Spiel?

(c) Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^{n}(k/2^k) = 2 - (n+2)/2^n$ für $n = 1$ zutrifft.

(d) Komplettieren Sie den Induktionsbeweis für die Gültigkeit der Formel aus Aufgabenteil (c).

(e) Berechnen Sie mit Hilfe der Formel aus Aufgabenteil (c) den Erwartungsnutzen der Lotterie für einen Akteur mit logarithmischer Nutzenfunktion. Löst diese Lösung das Paradox?

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

A4: Finanzmarktvollständigkeit

Betrachten Sie einen Finanzmarkt mit drei Umweltzuständen und drei Assets mit Payoff-Vektoren und dazugehörigen gleichgewichtigen Preisen p_k:

$$\begin{array}{lccc} & \text{Asset 1} & \text{Asset 2} & \text{Asset 3} \\ \text{Payoff-Vektoren} & \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ p_k & 1,1 & 0,8 & 0,7 \end{array}$$

(a) Wie lautet die Payoff-Matrix $\mathbf{A}$, der Portfolio-Vektor $\mathbf{z}$ und in Zustand s der Payoff-Vektor $\mathbf{x}$?

(b) Stellen Sie die Gleichungen auf, die das Portfolio bestimmen, mit dem die vorgegebenen Payoffs x_s in den drei Umweltzuständen $s = 1, 2, 3$ erwirtschaftet werden.

(c) Lösen Sie die Gleichungen aus Aufgabenteil (b) nach z_1, z_2 und z_3 (in Abhängigkeit von x_1, x_2 und x_3) auf.

(d) Ermitteln Sie den Preis $\tilde{p}_{t,s}$ für $s = 3$ (Hinweis: $\tilde{p}_{t,s} = \sum_{k=1}^{K} z_k p_k$).

(e) Nehmen Sie für $x_1 = x_2 = 0$ und $x_3 = 0$ an. Setzen Sie diese in die Ergebnisse aus den Teilaufgaben (c) und (d) ein und berechnen Sie das Portfolio ($\mathbf{z}$) und den Preis $\tilde{p}_{t,3}$.

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

A5: Theorem (ECAS and ECCM)

Unten stehen die Definition eines ECAS und das ECAS-ECCM-Theorem. In den Formulierungen sind insgesamt fünf Fehler. Markieren und korrigieren Sie die Fehler.

Definition: *An allocation* $(\mathbf{y}^i)_{i=1}^I$, *AS holdings* $(\tilde{\mathbf{z}}^i)_{i=1}^I$, *and a vector of AS prices* $\tilde{\mathbf{q}}$ *are an* **equilibrium with a complete set of ASs (ECAS)** *if*

- $(\mathbf{c}^i, \tilde{\mathbf{z}}^i,)$ *maximizes* U^i *subject to the individual's budget constraints for all consumers* i *and*
- *markets clear:*

$$\sum_{i=1}^I \mathbf{c}^i - \sum_{i=1}^I \mathbf{y}^i = 0$$

$$\sum_{i=1}^I \tilde{\mathbf{z}}^i = \sum_{i=1}^I \mathbf{y}^i$$

Considered an ECCM with $q_t = 1$

Theorem (ECAS and ECCM): *Let* $((\mathbf{y}^{i*}, \tilde{\mathbf{p}})$ *be an ECCM.*

Let for $s = 1, ..., S$

$$\tilde{p}_s = q_{t+1,s}$$

and

$$\tilde{z}_s^i = c_{t+1,s}^{i*} - y_{t+1,s}^i$$

Then $((\mathbf{c}^{i*}, \tilde{\mathbf{z}}^i)_{i=1}^I, \tilde{\mathbf{q}})$ *is an ECAS.*

Aufgabe B1: CAPM

(a) Was wird im CAPM über die Nutzenfunktion der Individuen angenommen? Welche Annahme sichert, dass die Grenznutzen positiv sind?

(b) Definieren Sie die Rendite $r^j_{t+1,s}$ von Aktie j und die Marktrendite $r^M_{t+1,s}$. Formulieren Sie damit die CAPM-Gleichung.

(c) Unter den gemachten Annahmen gilt in einem ESME $\tilde{p}_s = \pi_s(a - by_{t+1,s})$ mit Konstanten a und b. Betrachten Sie einen riskanten Payoff $\alpha_{t+1,s}$. Definieren Sie den Wert v^α_t dieses Payoffs aus Sicht von t und die Rendite $r^\alpha_{t+1;s}$.

(d) Beweisen Sie mit Hilfe der Formel für $\tilde{p}_s$:

(e) Leiten Sie die CAPM-Formel aus Aufgabenteil (b) her, indem Sie die Formel aus Aufgabenteil (d) auf ein sicheres Asset, auf eine Aktie j und auf den Markt anwenden. (f) Erläutern Sie, warum Assets mit hohem β^j eine hohe erwartete Rendite haben.

Aufgabe B2: Gleichgewicht mit vollständiger Menge von ASs

(a) Wie lauten die Budgetrestriktionen in der Ökonomie mit einer vollständigen Menge von ASs?

(b) Definieren Sie ein Gleichgewicht für die Ökonomie mit einer vollständigen Menge von ASs (ECAS).

(c) Formulieren Sie das Theorem, das die „Äquivalenz“ zwischen einem ECCM $((\mathbf{c}^{i*})^I_{i=1}, \mathbf{q})$ und einem ECAS herstellt. (Hinweis: Berücksichtigen Sie insbesondere die Bedingung $\tilde{z}^i_s = c^{i*}_{t+1,s} - y^i_{t+1,s}$.)

(d) Definieren Sie B^i und $B^{i\prime}$. Erklären Sie kurz, warum $\mathbf{c}^{i*} \in B^{i\prime} \subset B^i$ impliziert, dass Konsument i bei den ECAS-Preisen $\mathbf{c}^{i*}$ wählt.

(e) Beweisen Sie: $\mathbf{c}^{i*} \in B^{i\prime}$.

(f) Beweisen Sie: $B^{i\prime} \subset B^i$.

(g) Beweisen Sie Gütermarkträumung und Räumung der AS-Märkte (was den Beweis des Theorems aus Aufgabenteil (c) komplettiert).

(h) Welche Bedingung garantiert Finanzmarktvollständigkeit?

Aufgabe B3: No trade equilibrium und Fundamentalwert

In einer Tauschökonomie mit Zeithorizont $T \geq 1$ haben die Individuen i die Nutzenfunktion

$$U^i_{s,t}(\mathbf{c}^i) = \sum_{\tau=0}^{T} (\beta^i)^{\tau-t} E_t\left[u^i(c^i_\tau)\right]$$

und die Budgetrestriktion

$$c^i_{s,t} + \sum_{k=1}^{K} p_{sk,t}\left(z^i_{sk,t} - z^i_{sk,t-1}\right) \leq y^i_{s,t} + \sum_{k=1}^{K} a_{sk,t} z^i_{sk,t-1}.$$

(a) Was ist ein No trade equilibrium (NTE)? In welcher Hinsicht müssen die Individuen i „gleich“ sein, damit es ein NTE gibt?

(b) Leiten Sie die fundamentale Asset-pricing-Gleichung für Asset k (mit Payoffs $a_{sk,t}$ und Preis $p_{sk,t}$) her, indem Sie annehmen, dass Individuum i seine Asset-Haltung einmalig um $dz_{sk,t} \neq 0$ ändert.

Definieren Sie dabei den stochastischen Diskontfaktor $M_{t,t+1,s}$, und interpretieren Sie ihn: In welchen Zuständen s ist er hoch, in welchen niedrig?

(c) Unter welchen Annahmen folgt der Asset-Preis einem Random walk (d.h. $p_{k,t} = E_t(p_{k,t+1})$)? Begründen Sie Ihre Antwort mit der fundamentalen Asset-pricing-Gleichung aus Aufgabenteil (b).

(d) Beweisen Sie, dass bei Risikoneutralität der Preis dem Fundamentalwert

$$p_{k,t} = \sum_{\tau=t+1}^{T} \beta^{\tau-t} E_t(a_{k,\tau})$$

entspricht.