

Master-Kursprüfung  
**„Kapitalmarkttheorie 2“**

Schwerpunktmodul „Finanzmärkte“

6 Kreditpunkte

Bearbeitungsdauer: 90 Minuten

WS 2015/16

29.2.2016

Prof. Dr. Lutz Arnold

*Bitte gut leserlich ausfüllen:*

Name:

Vorname:

Matr.-nr.:

*Wird vom Prüfer ausgefüllt:*

A	B1	B2	B3	$\Sigma$

**Bearbeiten Sie vier der fünf Aufgaben A1-A5  
und zwei der drei Aufgaben B1-B3!**

- Die Bearbeitungsdauer beträgt **90 Minuten**.
- In den Aufgaben **A1-A5** sind maximal je **5 Punkte** erreichbar.
- Machen Sie immer so weit wie möglich von den Zahlenangaben in den Aufgabenstellungen Gebrauch (keine allgemeinen Lösungen und Zwischenschritte!).
- Tragen Sie die Lösungen bitte in die Lösungsfelder auf dem Klausurbogen ein.
- In den Aufgaben **B1-B3** sind maximal je **15 Punkte** erreichbar.
- In der Aufgabenstellung nicht explizit definierte Symbole sind aus dem Foliensatz zur Vorlesung übernommen.
- Zugelassenes Hilfsmittel: nicht-programmierbarer Taschenrechner.
- Bitte überprüfen Sie vor Beginn der Bearbeitung, ob Ihre Klausur alle Seiten enthält. Sie beginnt mit Seite 1 und endet mit Seite 13.

**A1: Erster Hauptsatz der Wohlfahrtstheorie in der CCM-Ökonomie** Betrachten Sie die Ökonomie mit  $S (\geq 2)$  Umweltzuständen und kontingenten Gütermärkten.

(a) Erklären Sie, was ein kontingenter Gütermarkt ist.

(b) Definieren Sie machbare („feasible“) und Pareto-optimale Allokationen  $(\mathbf{c}^i)_{i=1}^I$ .

(c) Wie lauten die Budgetbeschränkung eines Individuums  $i$ ?

(d) Definieren Sie ein Gleichgewicht und formulieren Sie den ersten Hauptsatz der Wohlfahrtstheorie für die Ökonomie mit kontingenten Gütermärkten.

(e) Beweisen Sie den Satz aus Aufgabenteil (d).

## A2: Komplettierung des Finanzmarktes mit Optionen

Betrachten Sie (für  $S = 3$ ) das Asset  $k$  mit Payoffs  $(3, 6, 8)$  und dem zugehörigen Preis  $p_k = 10$ .

- (a) Was ist eine Call-Option? Was versteht man unter einem strike price?
- (b) Betrachten Sie das oben beschriebene Asset  $k$ . Mit welchen strike prices von Call-Optionen kann hier die Komplettierung des Finanzmarktes erreicht werden? Wie lauten die Payoff-Vektoren der beiden Optionen?
- (c) Stellen Sie das lineare Gleichungssystem auf, das das Portfolio  $(z_1, z_2, z_3)$  bestimmt, mit dem die Arrow Security (AS) für Zustand 1 nachgebildet wird. Wie lautet dieses Portfolio?
- (d) Berechnen Sie die Portfolios, mit denen die AS für Umweltzustand 2 bzw. die AS für Umweltzustand 3 nachgebildet werden.
- (e) Berechnen Sie das Portfolio, das einen Euro in allen Umweltzuständen auszahlt. Was kostet dieses Portfolio?

### A3: Anwendungen der fundamentalen Asset-pricing-Gleichungen

(a) Geben Sie (ohne Herleitung) die fundamentalen Asset-pricing-Gleichungen für ein sicheres und ein riskantes Asset an.

(b) Geben Sie die Gleichung für die Kovarianz  $\sigma_{M,p+a}$  zwischen dem Payoff des riskanten Assets und dem stochastischen Diskontfaktor (SDF) an.

(c) Leiten Sie den Preis des riskanten Assets in Abhängigkeit von seinem erwarteten Payoff, dem sicheren Zins und der Kovarianz aus Aufgabenteil (b) her.

(d) Formulieren Sie den Zusammenhang aus Aufgabenteil (c) als eine Aussage über die erwartete Rendite  $E_t(R_{t+1})$  des riskanten Assets um.

(e) Definieren Sie das beta des riskanten Assets, und geben Sie  $E_t(R_{t+1})$  in Abhängigkeit von beta an.

**A4: St.-Petersburg-Paradoxon** Eine Lotterie zahlt  $2^k$  Euro aus, wenn eine faire Münze erstmals nach dem  $k$ -ten Wurf „Kopf“ liefert.

(a) Berechnen Sie den Erwartungswert dieser Lotterie.

(b) Wie hoch ist die faire Teilnahmegebühr bei diesem Spiel für einen risikoneutralen Akteur?

(c) Zeigen Sie, dass  $\sum_{k=1}^n (k/2^k) = 2 - (n+2)/2^n$  für  $n = 1$  zutrifft.

(d) Komplettieren Sie den Induktionsbeweis für die Gültigkeit der Formel aus Aufgabenteil (c).

(e) Berechnen Sie mit Hilfe der Formel aus Aufgabenteil (c) den Erwartungsnutzen der Lotterie für einen Akteur mit logarithmischer Nutzenfunktion.

**A5: Gesetz iterierter Erwartungen** Es gebe  $S = 5$  Umweltzustände und drei Zeitpunkte  $t = 1, 2, 3$ . Die Umweltzustände treten mit Wahrscheinlichkeiten von jeweils  $\pi_s = 20\%$  ein. Eine Zufallsvariable  $x$  nimmt die Werte  $x_1 = 10$ ,  $x_2 = 5$ ,  $x_3 = 20$ ,  $x_4 = 30$  bzw.  $x_5 = 15$  an. In  $t = 1$  sind alle Zustände in der Informationsmenge  $\sigma = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . In  $t = 2$  gibt es zwei Informationsmengen:  $\sigma'_1 = \{1, 2\}$  und  $\sigma'_2 = \{3, 4, 5\}$ . In  $t = 3$  liegt eine totale Partitionierung vor.

(a) Formulieren Sie das Gesetz iterierter Erwartungen.

(b) Stellen Sie die Angaben des oben beschriebenen Beispiels grafisch dar.

(c) Berechnen Sie die bedingten Erwartungswerte  $E(x|\sigma'_j)$ .

(d) Berechnen Sie  $E[E(x|\sigma')|\sigma]$ .

(e) Berechnen Sie  $E(x|\sigma)$ . Vergleichen Sie Ihr Ergebnis aus Aufgabenteil (d) hiermit. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

### Aufgabe B1: Gleichgewicht mit vollständiger Menge von ASs

- (a) Wie lauten die Budgetrestriktionen in der Ökonomie mit einer vollständigen Menge von ASs?
- (b) Definieren Sie ein Gleichgewicht für die Ökonomie mit einer vollständigen Menge von ASs (ECAS).
- (c) Formulieren Sie das Theorem, das die „Äquivalenz“ zwischen einem ECCM ( $(\mathbf{c}^{i*})_{i=1}^I, \mathbf{q}$ ) und einem ECAS herstellt. (Hinweis: Berücksichtigen Sie insbesondere die Bedingung  $\tilde{z}_s^i = c_{t+1,s}^{i*} - y_{t+1,s}^i$ .)
- (d) Definieren Sie  $B^i$  und  $B^{i'}$ . Erklären Sie kurz, warum  $\mathbf{c}^{i*} \in B^{i'} \subset B^i$  impliziert, dass Konsument  $i$  bei den ECAS-Preisen  $\mathbf{c}^{i*}$  wählt.
- (e) Beweisen Sie:  $\mathbf{c}^{i*} \in B^{i'}$ .
- (f) Beweisen Sie:  $B^{i'} \subset B^i$ .
- (g) Beweisen Sie Gütermarktträumung und Räumung der AS-Märkte (was den Beweis des Theorems aus Aufgabenteil (c) komplettiert).
- (h) Welche Bedingung garantiert Finanzmarktvollständigkeit?

### Aufgabe B2: CAPM

- (a) Was wird im CAPM über die Nutzenfunktion der Individuen angenommen? Welche Annahme sichert, dass die Grenznutzen positiv sind?
- (b) Definieren Sie die Rendite  $r_{t+1,s}^j$  von Aktie  $j$  und die Marktrendite  $r_{t+1,s}^M$ . Formulieren Sie damit die CAPM-Gleichung.
- (c) Unter den gemachten Annahmen gilt in einem ESME

$$\tilde{p}_s = \pi_s(a - by_{t+1,s})$$

mit Konstanten  $a$  und  $b$ . Betrachten Sie einen riskanten Payoff  $\alpha_{t+1,s}$ . Definieren Sie den Wert  $v_t^\alpha$  dieses Payoffs aus Sicht von  $t$  und die Rendite  $r_{t+1,s}^\alpha$ .

- (d) Beweisen Sie mit Hilfe der Formel für  $\tilde{p}_s$ :

$$1 = (1 + Er_{t+1}^\alpha) [a - bv_t^M (1 + Er_{t+1}^M)] - bv_t^M \sigma^{\alpha M}.$$

- (e) Leiten Sie die CAPM-Formel aus Aufgabenteil (b) her, indem Sie die Formel aus Aufgabenteil (d) auf ein sicheres Asset, auf eine Aktie  $j$  und auf den Markt anwenden.
- (f) Erläutern Sie, warum Assets mit hohem  $\beta^j$  eine hohe erwartete Rendite haben.

**Aufgabe B3: No trade equilibrium and Fundamentalwert** In einer Tauschökonomie mit Zeithorizont  $T \geq 1$  haben die Individuen  $i$  die Nutzenfunktion

$$U_{s,t}^i(\mathbf{c}^i) = \sum_{\tau=0}^T (\beta^i)^{\tau-t} E_t [u^i(c_\tau^i)]$$

und die Budgetrestriktion

$$c_{s,t}^i + \sum_{k=1}^K p_{sk,t} (z_{sk,t}^i - z_{sk,t-1}^i) \leq y_{s,t}^i + \sum_{k=1}^K a_{sk,t} z_{sk,t-1}^i.$$

- (a) Was ist ein No trade equilibrium (NTE)? In welcher Hinsicht müssen die Individuen  $i$  „gleich“ sein, damit es ein NTE gibt?
- (b) Leiten Sie die fundamentale Asset-pricing-Gleichung für Asset  $k$  (mit Payoffs  $a_{sk,t}$  und Preis  $p_{sk,t}$ ) her, indem Sie annehmen, dass Individuum  $i$  seine Asset-Haltung einmalig um  $dz_{sk,t} \neq 0$  ändert. Definieren Sie dabei den stochastischen Diskontfaktor  $M_{t,t+1,s}$ , und interpretieren Sie ihn: In welchen Zuständen  $s$  ist er hoch, in welchen niedrig?
- (c) Unter welchen Annahmen folgt der Asset-Preis einem Random walk (d.h.  $p_{k,t} = E_t(p_{k,t+1})$ )? Begründen Sie Ihre Antwort mit der fundamentalen Asset-pricing-Gleichung aus Aufgabenteil (b).
- (d) Beweisen Sie, dass bei Risikoneutralität der Preis dem Fundamentalwert

$$p_{k,t} = \sum_{\tau=t+1}^T \beta^{\tau-t} E_t(a_{k,\tau})$$

entspricht.









