Master-Kursprüfung

„Kapitalmarkttheorie 2“

Schwerpunktmodul „Finanzmärkte“

6 Kreditpunkte

Bearbeitungsdauer: 90 Minuten

WS 2014/15

23.2.2015

Prof. Dr. Lutz Arnold

Bitte gut leserlich ausfüllen:
Name:
Vorname:
Matr.-nr.:

Wird vom Prüfer ausgefüllt:

A	B1	B2	B3	$\sum$

Bearbeiten Sie <u>vier der fünf</u> Aufgaben A1-A5 <u>und zwei der drei</u> Aufgaben B1-B3!

- Die Bearbeitungsdauer beträgt **90 Minuten**.
- In den Aufgaben **A1-A5** sind maximal je **5 Punkte** erreichbar.
- Machen Sie immer so weit wie möglich von den Zahlenangaben in den Aufgabenstellungen Gebrauch (keine allgemeinen Lösungen und Zwischenschritte!).
- Tragen Sie die Lösungen bitte in die Lösungsfelder auf dem Klausurbogen ein.
- In den Aufgaben **B1-B3** sind maximal je **15 Punkte** erreichbar.
- In der Aufgabenstellung nicht explizit definierte Symbole sind aus dem Foliensatz zur Vorlesung übernommen.
- Zugelassenes Hilfsmittel: nicht-programmmierbarer Taschenrechner.
- Bitte überprüfen Sie vor Beginn der Bearbeitung, ob Ihre Klausur alle Seiten enthält. Sie beginnt mit Seite 1 und endet mit Seite 13.

A1: Erster Hauptsatz der Wohlfahrtstheorie in der CCM-Ökonomie

Betrachten Sie die Ökonomie mit S (≥ 2) Umweltzuständen und kontingenten Gütermärkten.

(a) Erklären Sie, was ein „kontingenter Gütermarkt“ ist.

(b) Definieren Sie machbare („feasible“) Allokationen $(\mathbf{c}^i)_{i=1}^I$.

(c) Definieren Sie Pareto-Optimalität.

(d) Wie lautet i's Budgetbeschränkung? Definieren Sie ein Gleichgewicht mit kontingenten Gütermärkten (ECCM).

(e) Formulieren Sie den ersten Hauptsatz der Wohlfahrtstheorie für die CCM-Ökonomie.

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

A2: Komplettierung des Finanzmarkts mit Optionen

Betrachten Sie ein Asset mit Payoffs (4, 5, 6).

(a) Wie lauten die Payoff-Vektoren von Call-Optionen auf dieses Asset mit Ausübungspreisen (strike prices) 4 bzw. 5?

(b) Wie lautet das lineare Gleichungssystem, das das Portfolio (z_1, z_2, z_3) bestimmt, mit dem die Arrow Securities (ASs) für Zustand 3 nachgebildet werden kann? Wie lautet dieses Portfolio?

(c) Wie lautet das Portfolio zur Nachbildung der AS für Umweltzustand 2?

(d) Wie lautet das Portfolio zur Nachbildung der AS für Umweltzustand 1?

(e) Wie lautet das Portfolio, das einen Euro in allen Umweltzuständen auszahlt?

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

A3: St.-Petersburg-Paradoxon

Eine Lotterie zahlt 2^k Euro aus, wenn eine faire Münze erstmals nach dem k-ten Wurf „Kopf" liefert.

(a) Berechnen Sie den Erwartungswert dieser Lotterie.

(b) Wie hoch ist die faire Teilnahmegebühr bei diesem Spiel für einen risikoneutralen Akteur?

(c) Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^{n}(k/2^k) = 2 - (n+2)/2^n$ für $n = 1$ zutrifft.

(d) Komplettieren Sie den Induktionsbeweis für die Gültigkeit der Formel aus Aufgabenteil (c).

(e) Berechnen Sie mit Hilfe der Formel aus Aufgabenteil (c) den Erwartungsnutzen der Lotterie für einen Akteur mit logarithmischer Nutzenfunktion.

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

A4: Finanzmarktvollständigkeit

Betrachten Sie einen Finanzmarkt mit drei Umweltzuständen und drei Assets mit Payoff-Vektoren und dazugehörigen gleichgewichtigen Preisen p_k:

	Asset 1	Asset 2	Asset 3
Payoff-Vektoren	$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$
p_k	$1,2$	$0,7$	$0,6$

(a) Wie lautet die Payoff-Matrix $\mathbf{A}$?

(b) Stellen Sie die Gleichungen auf, die das Portfolio bestimmen, mit dem die vorgegebenen Payoffs x_s in den drei Umweltzuständen $s = 1, 2, 3$ erwirtschaftet werden.

(c) Lösen Sie die Gleichungen aus Aufgabenteil (b) nach z_1, z_2 und z_3 (in Abhängigkeit von x_1, x_2 und x_3) auf.

(d) Ermitteln Sie den Preis $\tilde{p}_{t,s}$ für $s = 1$ (Hinweis: $\tilde{p}_{t,s} = \sum_{k=1}^{K} z_k p_k$).

(e) Nehmen Sie für $x_1 = 1$ und $x_2 = x_3 = 0$ an. Setzen Sie diese in die Ergebnisse aus den Teilaufgaben (c) und (d) ein und berechnen Sie das Portfolio ($\mathbf{z}$) und den Preis $\tilde{p}_{t,1}$.

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

A5: Theorem (ECAS and ECCM)

Unten stehen die Definition eines ECAS und das ECAS-ECCM-Theorem. In den Formulierungen sind insgesamt fünf Fehler. Markieren und korrigieren Sie die Fehler.

Definition: *An allocation* $(\mathbf{y}^i)_{i=1}^I$*, AS holdings* $(\tilde{\mathbf{z}}^i)_{i=1}^I$*, and a vector of AS prices* $\tilde{\mathbf{q}}$ *are an* **equilibrium with a complete set of ASs (ECAS)** *if*

- $(\mathbf{c}^i, \tilde{\mathbf{z}}^i,)$ *maximizes* U^i *subject to the individual's budget constraints for all consumers* i *and*
- *markets clear:*

$$\sum_{i=1}^I \mathbf{c}^i - \sum_{i=1}^I \mathbf{y}^i = 0$$

$$\sum_{i=1}^I \tilde{\mathbf{z}}^i = \sum_{i=1}^I \mathbf{y}^i$$

Considered an ECCM with $q_t = 1$

Theorem (ECAS and ECCM): *Let* $((\mathbf{y}^{i*}, \tilde{\mathbf{p}})$ *be an ECCM.*

Let for $s = 1, ..., S$

$$\tilde{p}_s = q_{t+1,s}$$

and

$$\tilde{z}_s^i = c_{t+1,s}^{i*} - y_{t+1,s}^i$$

Then $((\mathbf{c}^{i*}, \tilde{\mathbf{z}}^i)_{i=1}^I, \tilde{\mathbf{q}})$ *is an ECAS.*

Aufgabe B1: Edgeworth-Box

Gegeben sind zwei Individuen ($i = 1, 2$), die jeweils zwei Güter y_j ($j = 1, 2$) konsumieren können. Die Nutzenfunktionen der beiden Individuen lauten: $U^1(y_1, y_2) = y_1^{\alpha} y_2^{1-\alpha}$ und $U^2(y_1, y_2) = y_1^{\beta} y_2^{1-\beta}$

(a) Was wird mit dem Edgeworth-Box Konzept analysiert?

(b) Aus welcher Bedingung wird die Kontraktkurve (KK) der Edgeworth-Box hergeleitet? Ermitteln Sie diese KK.

Nehmen Sie für $\alpha = 0,5$ und $\beta = \frac{2}{3}$ an und setzen Sie dies in die KK-Gleichung ein. Interpretieren Sie diese Gleichung.

Betrachten Sie **jetzt** eine Zwei-Perioden-Ökonomie mit zwei möglichen Umweltzuständen in $t + 1$ (Hinweis: ohne Konsum und Ausstattungen in t). Die eine Hälfte der Konsumenten hat Ausstattungen $(y^1_{t+1,1}, y^1_{t+1,2}) = (0,05; 0,95)$, die andere Hälfte $(y^2_{t+1,1}, y^2_{t+1,2}) = (0,95; 0,05)$. Alle Konsumenten haben die gleiche Nutzenfunktion.

(c) Illustrieren Sie mit Hilfe von Indifferenzkurven, dass der Ausstattungspunkt keine Pareto-optimale Allokation ist.

(d) Welches Marktgleichgewicht ergibt sich, wenn Handel nur auf Spot-Märkten möglich ist? Liegt Pareto-Optimalität vor? Woran erkennt man das?

(e) Vervollständigen Sie die Edgeworth-Box um den Gleichgewichtspunkt mit kontingenten Gütermärkten (ECCM), der sich ausgehend von den Anfangsausstattungen aus der Aufgabenstellung ergibt. Zeichnen Sie auch die Preisgerade ein, und zeigen Sie, dass das Gleichgewicht Pareto-optimal ist.

(f) Individuen mit welcher Risikoeinstellung profitieren am meisten von einer Ökonomie mit Terminmärkten? Begründen Sie Ihre Antwort anhand eines Zahlenbeispiels.

Aufgabe B2: Gleichgewicht mit vollständiger Menge von ASs

(a) Wie lauten die Budgetrestriktionen in der Ökonomie mit einer vollständigen Menge von ASs?

(b) Definieren Sie ein Gleichgewicht für die Ökonomie mit einer vollständigen Menge von ASs (ECAS).

(c) Formulieren Sie das Theorem, das die „Äquivalenz" zwischen einem ECCM $((\mathbf{c}^{i*})_{i=1}^{I}, \mathbf{q})$ und einem ECAS herstellt. (Hinweis: Berücksichtigen Sie insbesondere die Bedingung $\tilde{z}^i_s = c^{i*}_{t+1,s} - y^i_{t+1,s}$.)

(d) Definieren Sie B^i und $B^{i\prime}$. Erklären Sie kurz, warum $\mathbf{c}^{i*} \in B^{i\prime} \subset B^i$ impliziert, dass Konsument i bei den ECAS-Preisen $\mathbf{c}^{i*}$ wählt.

(e) Beweisen Sie: $\mathbf{c}^{i*} \in B^{i\prime}$.

(f) Beweisen Sie: $B^{i\prime} \subset B^i$.

(g) Beweisen Sie Gütermarkträumung und Räumung der AS-Märkte (was den Beweis des Theorems aus Aufgabenteil (c) komplettiert).

(h) Welche Bedingung garantiert Finanzmarktvollständigkeit?

Aufgabe B3: Gesetz der iterierten Erwartungen (LIE)

Betrachten Sie eine Ökonomie mit S (≥ 2) Umweltzuständen und dem Zeithorizont $t = 1, .., T$.

(a) Was lässt sich mit dem Gesetzt der iterierten Erwartungen beantworten?

(b) Welche Annahmen werden über die Informationen in den Zeitpunkten $t = 0$, $t = 1, .., T-1$ und $t = T$ getroffen (Stichwort: Partitionierung)?

(c) Definieren Sie $E(x|\sigma)$ und $E(E(x|\sigma^{'})|\sigma)$. Benennen Sie dabei alle verwendeten Variablen.

(d) Beweisen Sie mit fünf bis sieben Zwischenschritten, dass $E(x|\sigma) = E(E(x|\sigma^{'})|\sigma)$ gilt.

Betrachten Sie **jetzt** eine Ökonomie mit fünf Umweltzuständen $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und drei Zeitpunkten: $T = \{t_0, t_1, t_2\}$. Die Auszahlungen sind in der Periode t_0 und t_1 unbekannt. In der letzten Periode t_2 wissen Sie, in welchem Umweltzustand Sie sich befinden und welche Auszahlung Sie erhalten. Jedem einzelnen Elementarereignis $\{1\}; \{2\}; \{3\}; \{4\}; \{5\}$ mit den dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten $\pi_1 = \frac{1}{10}, \pi_2 = \frac{1}{10}, \pi_3 = \frac{1}{5}, \pi_4 = \frac{1}{5}, \pi_5 = \frac{2}{5}$ entsprechen die Auszahlungen $\{10\}, \{5\}, \{20\}, \{30\}, \{15\}$. In t_0 gibt es nur eine Informationsmenge. Nach der ersten Partitionierung in t_1 liegen zwei Informationsmengen mit gleicher Wahrscheinlichkeit vor. In t_2 sind alle Zustände beobachtbar.

(e) Stellen Sie die Angaben dieses Beispiels graphisch dar.

(f) Was lässt sich aus dem oben beschriebenen Beispiel über den zukünftigen Preis in t_2 aussagen (keine Berechnung)?

Kapitalmarkttheorie 2 WS 2014/15