Master-Kursprüfung

„Kapitalmarkttheorie 2“

Schwerpunktmodul „Finanzmärke“

6 Kreditpunkte

Bearbeitungsdauer: 90 Minuten

WS 2011/12

5.3.2012

Prof. Dr. Lutz Arnold

Bitte gut leserlich ausfüllen:

Name:

Vorname:

Matr.-nr.:

Wird vom Prüfer ausgefüllt:

A	B1	B2	B3	$\sum$

Bearbeiten Sie vier der fünf Aufgaben A1-A5 und zwei der drei Aufgaben B1-B3!

- Die Bearbeitungsdauer beträgt **90 Minuten**.
- In den Aufgaben **A1-A5** sind maximal je **5 Punkte** erreichbar.
- Machen Sie immer so weit wie möglich von den Zahlenangaben in den Aufgabenstellungen Gebrauch (keine allgemeinen Lösungen und Zwischenschritte!).
- Tragen Sie die Lösungen bitte in die Lösungsfelder auf dem Klausurbogen ein.
- In den Aufgaben **B1-B3** sind maximal je **15 Punkte** erreichbar.
- In der Aufgabenstellung nicht explizit definierte Symbole sind aus dem Foliensatz zur Vorlesung übernommen.
- Zugelassenes Hilfsmittel: nicht-programmmierbarer Taschenrechner.
- Bitte überprüfen Sie vor Beginn der Bearbeitung, ob Ihre Klausur alle Seiten enthält. Sie beginnt mit Seite 1 und endet mit Seite 14.

A1: Edgeworth-Box Betrachten Sie eine Zwei-Perioden-Ökonomie mit zwei möglichen Umweltzuständen in $t+1$ sowie ohne Konsum und Ausstattungen in t. Die eine Hälfte der Konsumenten hat Ausstattungen $(y^1_{t+1,1}, y^1_{t+1,2}) = (0{,}8;\, 0{,}2)$, die andere Hälfte $(y^2_{t+1,1}, y^2_{t+1,2}) = (0{,}2;\, 0{,}8)$. Beide haben die gleiche Nutzenfunktion.

(a) Zeichnen Sie den Ausstattungpunkt in eine Edgeworth-Box.

(b) Illustrieren Sie mit Indifferenzkurven, dass der Ausstattungspunkt keine Pareto-optimale Allokation ist.

(c) Welches Marktgleichgewicht ergibt sich, wenn Handel nur auf Spot-Märkten möglich ist? Liegt Pareto-Optimalität vor? Woran erkennt man das?

(d) Illustrieren Sie in der Edgeworth-Box den Gleichgewichtspunkt mit kontingenten Gütermärkten (ECCM), der sich ausgehend von den Anfangsausstattungen aus der Aufgabenstellung ergibt.

(e) Zeichnen Sie auch die Preisgerade ein, und illustrieren Sie, dass das Gleichgewicht Pareto-optimal ist.

(a), (b), (d), (e)

(c)

A2: St.-Petersburg-Paradoxon Eine Lotterie zahlt 2^k Euro aus, wenn eine faire Münze erstmals nach dem k-ten Wurf „Kopf " liefert.

(a) Berechnen Sie den Erwartungswert dieser Lotterie.

(b) Welchen Preis wäre ein risikoneutraler Akteur für diese Lotterie zu zahlen bereit?

(c) Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^{n}(k/2^k) = 2 - (n+2)/2^n$ für $n = 1$ zutrifft.

(d) Komplettieren Sie den Induktionsbeweis für die Gültigkeit der Formel aus Aufgabenteil (c).

(e) Berechnen Sie mit Hilfe der Formel aus Aufgabenteil (c) den Erwartungsnutzen der Lotterie für einen Akteur mit logarithmischer Nutzenfunktion.

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

A3: Anwendungen der fundamentalen Asset-pricing-Gleichungen

(a) Geben Sie (ohne Herleitung) die fundamentalen Asset-pricing-Gleichungen für ein sicheres und ein riskantes Asset an.

(b) Geben Sie die Gleichung für die Kovarianz $\sigma_{M,p+x}$ zwischen dem Payoff des riskanten Assets und dem SDF an.

(c) Leiten Sie den Preis des riskanten Assets in Abhängigkeit von seinem erwarteten Payoff, dem sicheren Zins und der Kovarianz aus Aufgabenteil (b) her.

(d) Normieren Sie den Preis des riskanten Assets auf eins ($p_t = 1$), und formulieren Sie den Zusammenhang aus Aufgabenteil (c) als eine Aussage über die erwartete Rendite $E_t(R_{t+1})$ des riskanten Assets um.

(e) Definieren Sie das beta des riskanten Assets, und drücken Sie $E_t(R_{t+1})$ in Abhängigkeit von beta aus.

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

A4: Komplettierung des Finanzmarkts mit Optionen Betrachten Sie ein Asset mit Payoffs (4, 5, 6).

(a) Wie lauten die Payoff-Vektoren von Call-Optionen auf dieses Asset mit Ausübungspreisen (strike prices) 4 bzw. 5?

(b) Wie lautet das lineare Gleichungssystem, das das Portfolio (z_1, z_2, z_3) bestimmt, mit dem die AS für Zustand 3 nachgebildet werden kann? Wie lautet dieses Portfolio?

(c) Wie lautet das Portfolio zur Nachbildung der AS für Umweltzustand 2?

(d) Wie lautet das Portfolio zur Nachbildung der AS für Umweltzustand 1?

(e) Wie lautet das Portfolio, das einen Euro in allen Umweltzuständen auszahlt?

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

A5: CAPM Bei quadratischer Nutzenfunktion und identschen subjektiven Diskontfaktoren lassen sich die Preise von ASs als $\tilde{p}_{t,s} = \pi_s(a - by_{t+1}, s)$ schreiben.

(a) Leiten Sie den Firmenwert v_t^j als Funktion von $E\tilde{y}_{t+1}^j$ und $E(\tilde{y}_{t+1}^j y_{t+1})$ her.

(b) Formen Sie Ihre Antwort zu Aufgabenteil (a) in eine Gleichung in Er_{t+1}^j, Er_{t+1}^M, v_t^M und σ^{jM} um.

(c) Wie lautet die zu Aufgabenteil (b) analoge Gleichung für den Zusammenhang zwischen Er_{t+1}^M, v_t^M, und σ^{M2}, der sich aus der Bewertung des gesamten Marktes ergibt (keine Herleitung notwendig)?

(d) Wie lautet die Beziehung zwischen $1/(1+r)$, Er_{t+1}^M und v_t^M (keine Herleitung notwendig)?

(e) Leiten Sie aus Ihren Antworten zu den Aufgabenteilen (b)-(d) die CAPM-Formel her.

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

Aufgabe B1: Erster Hauptsatz der Wohlfahrtstheorie in der CCM-Ökonomie

Betrachten Sie die Ökonomie mit S (≥ 2) Umweltzuständen und kontingenten Gütermärkten.

(a) Definieren Sie machbare (feasible) Allokationen $(\mathbf{c}^i)_{i=1}^I$. Definieren Sie Pareto-optimale Allokationen.

(b) Wie lautet i's Budgetbeschränkung? Definieren Sie ein Gleichgewicht mit kontingenten Gütermärkten (ECCM).

(c) Formulieren Sie den ersten Hauptsatz der Wohlfahrtstheorie für die CCM-Ökonomie. Beweisen Sie ihn. Nehmen Sie dazu an, dass es eine Pareto-superiore machbare Allokation gibt; zeigen Sie, dass diese Allokation zu Gleichgewichtspreisen teurer ist; und führen Sie das zu einem Widerspruch.

(d) Erklären Sie, was ein „kontingenter Gütermarkt“ ist.

Aufgabe B2: ESME

(a) Wie lauten die Budgetrestriktionen in der Stock market economy (SME) (in der es auch eine vollständige Menge von ASs gibt)?

(b) Definieren Sie ein Gleichgewicht für diese Ökonomie (ESME).

(c) Formulieren Sie das Theorem, das ein ESME auf ein Gleichgewicht einer Ausstattungsökonomie mit einer vollständigen Menge von ASs (ECAS) zurückführt.

(d) Definieren Sie, um das Theorem zu beweisen, die Mengen $B^{i\prime}$ und $B^{i\prime\prime\prime}$, und erläutern Sie mit einem Satz die Beweisidee.

(e) Im ECAS sind die Budgetrestriktionen

$$c_t^{i*} - y_t^i = -\sum_{s=1}^{S} \tilde{p}_{t,s} \tilde{z}_s^{i*}$$

$$c_{t+1,s}^{i*} - y_{t+1,s}^i = \tilde{z}_s^{i*}.$$

erfüllt. Beweisen Sie hiermit $\mathbf{c}^{i*} \in B^{i\prime\prime\prime}$.

(f) Sei $\mathbf{c}^i \in B^{i\prime\prime\prime}$, d.h. es gibt $\tilde{\mathbf{z}}^i$ und $\boldsymbol{\theta}^i$, so dass die SME-Busgetrestriktionen erfüllt sind. Beweisen Sie, dass $\mathbf{c}^i$ mit

$$\tilde{z}_s^{i\prime} = \tilde{z}_s^i + \sum_{j=1}^{J} (\theta^{ij} - \bar{\theta}^{ij}) \tilde{y}_{t+1,s}^j$$

auch in der Ausstattungsökonomie erreichbar ist. Argumentieren Sie, dass alle Märkte geräumt sind.

Aufgabe B3: Mehr-Perioden-Modell

(a) Leiten Sie die notwendigen Optimalitätsbedingungen für das Maximierungsproblem

$$\begin{aligned}
\max_{\{c_\tau, \omega_\tau, a_{\tau+1}\}_{\tau=t}^{\infty}} \quad &: \quad \sum_{\tau=t}^{\infty} \beta^{\tau-t} E_t[u(c_\tau)] \\
\text{s.t.: } a_{\tau+1} \quad &= \quad (a_\tau + y_\tau - c_\tau) \\
& \quad \left[\omega_\tau \frac{p_{\tau+1} - (1 + r_{\tau+1}) p_\tau + x_{\tau+1}}{p_\tau} + (1 + r_{\tau+1})\right]
\end{aligned}$$

her.

(b) Formen Sie die Bedigungen aus Aufgabenteil (a) so um, dass sich sowohl für $c_t = a_t + y_t$ als auch für $c_t \neq a_t + y_t$ die fundamentalen Asset-pricing-Gleichungen ergeben.

(c) Welche zusätzlichen Annahmen macht man, um ein No-trade equilibrium (NTE) zu erhalten? Definieren Sie ein NTE.

(d) Erklären Sie (ohne über Pareto-Optimalität zu argumentieren), warum der SDF aus den Asset-pricing-Gleichungen in Aufgabenteil (b) für alle Individuen identisch ist.

Kapitalmarkttheorie 2 WS 2011/12