

Master-Kursprüfung  
**„Kapitalmarkttheorie 2“**

Schwerpunktmodul „Finanzmärkte“

6 Kreditpunkte

Bearbeitungsdauer: 90 Minuten

WS 2008/09

2.3.2009

Prof. Dr. Lutz Arnold

*Bitte gut leserlich ausfüllen:*

Name:

Vorname:

Matr.-nr.:

*Wird vom Prüfer ausgefüllt:*

A	B1	B2	B3	$\Sigma$

**Bearbeiten Sie vier der fünf Aufgaben A1-A5  
und zwei der drei Aufgaben B1-B3!**

In den Aufgaben **A1-A5** sind maximal je **5 Punkte** erreichbar. Machen Sie immer so weit wie möglich von den Zahlenangaben in den Aufgabenstellungen Gebrauch (keine allgemeinen Lösungen!). Tragen Sie die Lösungen bitte in die Lösungsfelder auf dem Klausurbogen ein.

In den Aufgaben **B1-B3** sind maximal je **15 Punkte** erreichbar.

In der Aufgabenstellung nicht explizit definierte Symbole sind aus dem Foliensatz zur Vorlesung übernommen.

Zugelassenes Hilfsmittel: nicht-programmierbarer Taschenrechner.

Bitte überprüfen Sie vor Beginn der Bearbeitung, ob Ihre Klausur alle Seiten enthält. Sie beginnt mit Seite 1 und endet mit Seite 13.

**A1: Edgeworth-Box** Betrachten Sie eine Zwei-Perioden-Ökonomie mit zwei möglichen Umweltzuständen in  $t + 1$  sowie ohne Konsum und Ausstattungen in  $t$ . Die eine Hälfte der Konsumenten hat Ausstattungen  $(y_{t+1,1}^1, y_{t+1,2}^1) = (0,98; 0,02)$ , die andere Hälfte  $(y_{t+1,1}^2, y_{t+1,2}^2) = (0,02; 0,98)$ . Beide haben die gleiche Nutzenfunktion.

- (a) Zeichnen Sie den Ausstattungspunkt in eine Edgeworth-Box.
- (b) Illustrieren Sie mit Indifferenzkurven, dass der Ausstattungspunkt keine Pareto-optimale Allokation ist.
- (c) Welches Marktgleichgewicht ergibt sich, wenn Handel nur auf Spot-Märkten möglich ist? Liegt Pareto-Optimalität vor? Woran erkennt man das?
- (d) Welche Art von Gütermärkten braucht man für Pareto-Optimalität? Was wird auf diesen Märkten gehandelt?
- (e) Illustrieren Sie in der Edgeworth-Box das Marktgleichgewicht mit den Märkten aus Aufgabenteil (d), das sich ausgehend von den Anfangsausstattungen aus der Aufgabenstellung ergibt. Zeichnen Sie auch die Preisgerade ein, und illustrieren Sie, dass das Gleichgewicht Pareto-optimal ist.

(a), (b), (e)

(c)

(d)

**A2: Sicheres und riskantes Asset** Es gebe zwei Umweltzustände, ein sicheres Asset mit Zins  $r_{t+1}$  und ein riskantes Asset mit Payoffs  $x_{t+1,s}$  ( $s = 1, 2$ ). Zunächst sei  $x_{t+1,1} = 1$  und  $x_{t+1,2} = 0$ .

(a) Mit welchem Asset-Portfolio transportiert man eine Einheit Kaufkraft in Zustand 1 (und keine in Zustand 2)?

(b) Mit welchem Portfolio transportiert man eine Einheit Kaufkraft in Zustand 2 (und keine in Zustand 1)?

Nun sei  $r_{t+1} = 10\%$ ,  $x_{t+1,1} = 1$  und  $x_{t+1,2} = 2$ .

(c) Mit welchem Portfolio wird die AS  $(1, 0)$  erzeugt? (Runden Sie in dieser Aufgabe auf zwei Nachkommastellen.)

(d) Mit welchem Portfolio wird die AS  $(0, 1)$  erzeugt?

(e) Mit welchem Portfolio wird der Auszahlungsvektor  $(10, 9)$  erzeugt?

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

### A3: Der SDF

- (a) Wie lautet der stochastische Diskontfaktor (SDF) bei der Nutzenfunktion  $u^i(c^i) = \frac{(c^i)^{1-\gamma^i}}{1-\gamma^i}$ ?
- (b) Wie lautet der SDF bei der Nutzenfunktion  $u^i(c^i) = (c^i) - A^i(c^i)^2$  (mit  $A^i > 0$ )?
- (c) Wie hoch darf  $c^i$  in Aufgabenteil (b) höchstens sein, damit der Grenznutzen nicht negativ ist?
- (d) Beweisen Sie, dass in einem Marktgleichgewicht, in dem für jedes Güterpaar die individuellen Grenzraten der Substitution gleich sind, der SDF  $M_{t,t+1,s}^i$  für alle Individuen  $i$  gleich ist.
- (e) Welche zusätzlichen Annahmen führen zu einem „no-trade equilibrium“, in dem  $c_t^i = y_t^i$  und  $c_{t+1,s}^i = y_{t+1,s}^i$  gilt?

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

#### A4: Random walk

- (a) Definieren Sie einen Random walk („Die Zufallsvariable  $p_t$  folgt einem Random walk, wenn ...“).
- (b) Berechnen Sie rekursiv  $p_1, p_2, p_3$ . Welcher allgemeine Zusammenhang zwischen  $p_t$  einerseits sowie  $p_0$  und den Schocks  $\varepsilon_\tau$  wird hieraus ersichtlich?
- (c) Berechnen Sie aus der Formel aus Aufgabenteil (b)  $E_0(p_t)$ . Wenn  $p_t$  ein Asset-Preis ist, was bedeutet das für Kursprognosen?
- (d) Wie lautet die Formel für die Varianz von  $p_t$  aus Sicht von Periode 0?
- (e) Nehmen Sie an, dass die Schocks  $\varepsilon_\tau$  i.i.d. sind. Wie hängt die Varianz aus Aufgabenteil (d) von der Varianz der Schocks  $\sigma_\varepsilon^2$  ab? Zeigen Sie, dass die Varianz mit wachsendem  $t$  gegen unendlich geht.

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

**A5: „Synthetisierung von ASs“** Es gebe  $S = 3$  Zustände. Betrachten Sie ein Asset mit Payoff-

Vektor  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

- (a) Mit Call-Optionen mit welchen Strike prices erreicht man Kapitalmarktvollständigkeit?
- (b) Geben Sie die Payoffvektoren der Optionen aus Aufgabenteil (a) an.
- (c) Berechnen Sie das Portfolio, mit dem die AS für Zustand 1 „synthetisiert“ wird.
- (d) Berechnen Sie die Portfolios, mit denen die ASs für die Zustände 2 und 3 „synthetisiert“ werden.
- (e) Angenommen, die drei ASs aus den Aufgabenteilen (c) und (d) werden zu jeweils €0,30 gehandelt. Wie teuer muss dann bei Arbitragefreiheit ein Bond sein, das bei Fälligkeit €1 auszahlt?

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

### **Aufgabe B1: Erster Hauptsatz der Wohlfahrtstheorie in der CCM-Ökonomie**

Betrachten Sie die Ökonomie mit  $S$  ( $\geq 2$ ) Umweltzuständen und kontingenten Gütermärkten.

- (a) Definieren Sie machbare (feasible) Allokationen  $(\mathbf{c}^i)_{i=1}^I$ . Definieren Sie Pareto-optimale Allokationen.
- (b) Wie lautet  $i$ 's Budgetbeschränkung? Definieren Sie ein Gleichgewicht mit kontingenten Gütermärkten (ECCM).
- (c) Formulieren Sie den ersten Hauptsatz der Wohlfahrtstheorie für die CCM-Ökonomie. Beweisen Sie ihn. Nehmen Sie dazu an, dass es eine Pareto-superiore machbare Allokation gibt; zeigen Sie, dass diese Allokation zu Gleichgewichtspreisen teurer ist; und führen Sie das zu einem Widerspruch.

### **Aufgabe B2: Die fundamentalen Asset-pricing-Gleichungen im Mehr-Perioden-Modell**

- (a) Formulieren Sie das Maximierungsproblem, mit dem der Konsument mit unendlichem Zeithorizont seinen intertemporalen Nutzen durch eine geeignete Konsum-Spar-Entscheidung und eine geeignete Aufteilung seines Vermögens in riskante bzw. sichere Anlage maximiert.
- (b) Was gibt die Wertfunktion  $v(a_t)$  an? Stellen Sie hiermit die Bellman-Gleichung für das Maximierungsproblem aus Aufgabenteil (a) auf.
- (c) Leiten Sie aus den notwendigen Optimalitätsbedingungen und der Enveloppen-Bedingung die fundamentalen Asset-Pricing-Gleichungen her.

### **Aufgabe B3: Unmöglichkeit rationaler Asset-pricing-Bubbles**

- (a) Geben Sie (ohne Herleitung) die beiden fundamentalen Asset-pricing-Gleichungen an.
- (b) Nehmen Sie an, ein Fundamentalkurs  $f_t$  erfüllt die beiden Asset-pricing-Gleichungen, und es gilt  $r_{t+1} > 0$ . Formulieren Sie das Theorem zur Unmöglichkeit negativer Bubbles  $b_t$ , und beweisen Sie es.
- (c) Formulieren Sie das Theorem zur Unmöglichkeit (des Entstehens) rationaler Bubbles, und beweisen Sie es.













