U N I V E R S I T Ä T   R E G E N S B U R G

Naturwissenschaftliche Fakultät II - **Physik**

Anleitung zum Grundlagenpraktikum A

für Bachelor of Nanoscience

Versuch c - Schwingungen und Wellen

23. überarbeitete Auflage 2011

Dr. Stephan Giglberger

Inhaltsverzeichnis

1 Schwingungen und Wellen

Abbildung 1.1: *Surfer auf einer stehenden (Wasser-) Welle am Münchner Eisbach*

1.1 Schwingungen und Wellen

Schwingungen spielen in der Physik eine bedeutende Rolle. Wenn schwingende Teilchen (oder allgemein: schwingungsfähige Systeme) miteinander gekoppelt sind, entsteht eine Welle, d.h. die benachbarten gekoppelten Systeme führen nacheinander gleichartige Schwingungen aus.
Wellen sind demnach räumlich und zeitlich periodische Bewegungen, bei denen Energie und Impuls, jedoch keine Masse von einem Ort zum anderen transportiert wird. Die Ausbreitung (mechanischer) Wellen erfolgt dabei durch die Elastizität des Mediums.

Bewegt man beispielsweise das eine Ende eines Seils mit periodischer Bewegung auf und ab, so breitet sich eine fortschreitende Welle aus, die einzelnen Teilchen des Seils bewegen sich dabei senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Man spricht daher von **Transversalwellen** oder Querwellen.

$$\left(A_0 \perp \vec{k}\right) \tag{1.1}$$

wobei A_0 für die Amplitude (Auslenkung) der Welle steht und $\vec{k}$ der Wellenvektor ist, der in Ausbreitungsrichtung zeigt. Im Gegensatz dazu existieren auch Wellen, bei denen die Auslenkung parallel zur Ausbreitungsrichtung verläuft, z.B. bei Schallwellen. Hier spricht man von **Longitudinalwellen** oder Längswellen.

$$\left(A_0 || \vec{k}\right) \tag{1.2}$$

Für die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wellen gilt ganz allgemein

$$v = \lambda \cdot f. \tag{1.3}$$

Hier ist v die Ausbreitungsgeschwindigkeit, λ die Wellenlänge und f die Frequenz der Welle.

1.1.1 Literaturempfehlung

Richard P. Feynman: Vorlesungen über Physik 2, Elektromagnetismus und Struktur der Materie, Definitive Edition, 5. Auflage, Oldenburg Verlag

1.1.2 Wellengleichung

Die Form eines Seils mit Wellenberg lässt sich allgemein beschreiben mit

$$y = y(x) \tag{1.4}$$

Unter der Voraussetzung, dass die Form des Wellenbergs über die Zeit unverändert bleibt (d.h. Vernachlässigung der *Dispersion*) führt man ein neues Koordinatensystem mit dem Ursprung $\mathcal{O}'$ ein, in dem der Wellenberg ruht. Das neue Koordinatensystem bewegt sich also mit dem Wellenberg mit, die Form des Seils wird demnach in $\mathscr{O}'$ beschrieben mit

$$y' = y'(x') \tag{1.5}$$

Damit wird die Bewegung im urspünglichen Koordinatensystem $\mathscr{O}$ beschrieben durch

$$y = y(x - vt) \tag{1.6}$$

für Bewegung nach rechts bzw.

$$y = y(x + vt) \tag{1.7}$$

für Bewegung nach links.
Ganz allgemein bezeichnet man eine die Welle beschreibende Funktion, die von Zeit (t) und Ort (x) abhängt, mit Wellenfunktion.

1.1.3 Wellengleichung - mathematische Herleitung

Für einen linearen Zusammenhang zwischen rücktreibender Kraft und Auslenkung (Hookesches Gesetz) eines massebehafteten Körpers ergibt sich eine Schwingungsgleichung im Sinne von

$$\frac{d^2}{dt^2} f(t) = -\lambda\, f(t). \tag{1.8}$$

Um nun von einer Schwingung zu einer Welle zu kommen muss zusätzlich die Möglichkeit der räumlichen Ausbreitung berücksichtigt werden, da die Welle sich durch die Kopplung benachbarter Raumelemente fortpflanzt. Stellen wir uns ein eingespanntes Seil vor, das durch Zupfen angeregt wird. Weiterhin solle sich die Form der Auslenkung $f(x,t)$ nicht verändern. Eine derartige Bewegung wird durch die *Wellengleichung* beschrieben:

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} \tag{1.9}$$

Sie hat als eine mögliche Lösung eine Funktion $f(x,t)$ der Form

$$f(x,t) = g(x - vt) \tag{1.10}$$

wobei g eine beliebige Funktion ist, die ein starres Muster beschreibt, das sich mit der Geschwindigkeit v in x-Richtung bewegt. Dies könnte z.B. ein Wellenberg sein, der ein gespanntes Seil entlang läuft (von „links nach rechts“). Diese Funktion hängt nur noch von *einer* Variablen ab[1], nämlich von $(x-vt)$. Die Ableitungen von g nach eben dieser Variablen wollen wir mit g' bzw. g'' etc. bezeichnen.

Zum Beweis, dass dies eine Lösung der Wellengleichung darstellt, differenzieren wir Gl. 1.9 zunächst zweimal nach dem Ort:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g'(x-vt) \cdot \frac{\partial (x-vt)}{\partial x} = g'(x-vt), \tag{1.11}$$

Für die zweite Ableitung gilt analog

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = g''(x-vt). \tag{1.12}$$

Die Ableitungen nach der Zeit ergeben

$$\frac{\partial f}{\partial t} = g'(x-vt)(-v) \tag{1.13}$$

und

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = g''(x-vt) \cdot v^2. \tag{1.14}$$

Die zweite Zeitableitung der Funktion f ist also gleich dem v^2-fachen der zweiten Ableitung nach x, so wie es in Gl. 1.9 gefordert ist. Durch Vergleich beiden Gleichungen wird die allgemeine Konstante c aus Gleichung 1.9, die unterschiedliche physikalische Ursachen haben kann, mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit identifiziert.
Durch Einsetzen kann man leicht zeigen, dass auch eine Funktion

$$f(x,t) = h(x+vt) \tag{1.15}$$

eine Lösung der Wellenfunktion ist. In Beispiel des laufenden Wellenbergs auf einem gespannten Seil würde der Wellenberg in die $-x$-Richtung laufen (von „rechts nach links“).

Die *allgemeine* Lösung der eindimensionalen Wellengleichung erhält man durch Überlagerung - man spricht in der Physik von *Superposition* - dieser beiden möglichen Lösungen[2], so dass gilt

$$f = g(x-vt) + h(x+vt) \tag{1.16}$$

Dabei stellt $g(x-vt)$ eine in x-Richtung vorwärtslaufende Welle und $h(x+vt)$ eine rückwärtslaufende Welle dar.

[1] man kann hier natürlich substituieren: $z := x - vt$
[2] die Wellengleichung enthält nur v^2 - von daher ändert sich nichts, wenn das Vorzeichen von v umgedreht wird.

1.1.4 Reflektion von Wellen

Wird ein Seil an einem Ende periodisch auf und ab bewegt, läuft eine Welle mit der Geschwindigkeit v das Seil entlang. Am anderen Ende des Seils wird diese Welle reflektiert. Hierbei sind zwei Fälle (Randbedingungen) zu unterscheiden (siehe Abb. 1.2):

1. Reflektion am losen Ende

   Ist das andere Ende des Seils lose, z.B. lediglich durch einen Ring in Schwingungsrichtung fixiert, wird die Welle ohne Änderung reflektiert.

2. Reflektion am festen Ende

   Ist das andere Ende des Seils jedoch festgebunden, z.B. an einer Wand, kommt es zu einem Phasensprung: die Welle wird um den Betrag π (also um 180°) gedreht und läuft somit invertiert der einlaufenden Welle entgegen.

In beiden Fällen überlagern sich einlaufende und reflektierte Welle, man spricht von *Superposition von Wellen* oder von *Interferenz*. In vorliegenden Fall sind Frequenz und Amplitude von einlaufender und reflektierter Welle gleich, sie unterscheiden sich aber in ihrer Ausbreitungsrichtung und ggfs. ihrer Phasenlage. Allgemein kann man die Reflektion für unterschiedliche Randbedingungen mit ei-

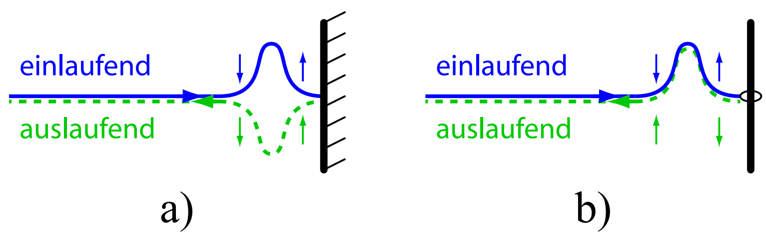

Abbildung 1.2: *Reflektion von Wellen mit a) festem Ende b) losem Ende*

nem Phasensprung ϕ am Punkt der Reflektion beschreiben. Die beiden oben genannten Fälle sind dann einfach zwei Spezialfälle mit $\phi = 0$ und $\phi = \pi$ bzw. 180°.

Die Beschreibung der Wellenfunktion lautet in diesem Fall

$$y(x,t) = g(x - vt) + y(g + vt + \phi) \tag{1.17}$$

Unter bestimmten Umständen entsteht hierbei eine sog. *Stehende Welle*. Ihre Besonderheit ist, dass sie sich - wie der Name ja schon sagt, nicht ausbreitet, sondern „steht“. Bei der Überlagerung der einlaufenden und reflektierten Welle entstehen Punkte, die ständig in Ruhe sind, die sog. *Schwingungsknoten*. Zwischen je zwei Schwingungsknoten entstehen *Schwingungsbäuche*, die mit maximaler Amplitude schwingen. Findet die Reflexion an einem festen Ende statt, entsteht an diesem Ende ein Schwingungsknoten; bei Reflexion am losen Ende ensteht ein Schwinungsbauch.

1.1.5 Stehende Seilwellen

Ist ein Seil an beiden Enden fest fixiert (so wie z.B. eine Gitarrensaite), so treten an beiden Enden Reflexionen auf. An beiden Enden befinden sich Schwingungsknoten, dazwischen bilden sich stehende Wellen aus (siehe Abb. 1.3). Aus diesen Randbedingungen lassen sich Rückschlüsse auf den Zusammenhang von Seillänge und Wellenlänge ziehen. Es muss gelten:

$$L = n \cdot \frac{\lambda}{2}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.18}$$

d.h. die Seillänge (L) entspricht einem ganzzahligen Vielfachen (n) der halben Wellenlänge (λ).

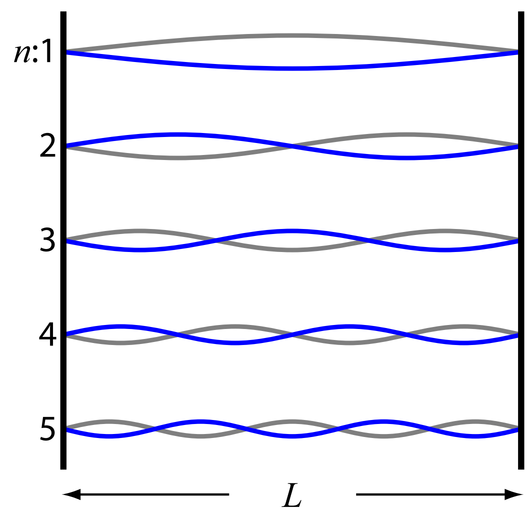

Abbildung 1.3: *Stehende Wellen mit n Eigenschwingungen*

Die Frequenzen der Welle, bei der die obige Bedingung 1.18 erfüllt ist, heißen *Resonanzfrequenzen*. Die niedrigste Frequenz, die für den Fall $n = 1$ auftritt, ist die *Eigenfrequenz* (auch *Eigenresonanz* oder *Grundfrequenz*). Für $n = 2, 3, \ldots$ nennt man diese Frequenzen n-te *Harmonische* oder $(n-1)$-te Oberschwingung.
Mit Gl. 1.3 folgt für die Beschreibung der Frequenz f_n der n-ten Eigenschwingung

$$f_n = \frac{v}{\lambda} = n \cdot \frac{v}{2L}. \tag{1.19}$$

Diese Beschreibung kann durch Benutzung der Schreibweise $f_1 = v/(2L)$ für die Grundschwingung ($n = 1$) vereinfacht werden zu

$$f_n = n \cdot f_1 \tag{1.20}$$

Hinweis: Verdoppelt man n, so verdoppelt sich die Frequenz (in der Akkustik würde man sagen: der Ton ist doppelt so hoch, der Musiker spricht von einer Oktave).

1.1.6 Eigenschaften von Seilwellen

Eine Welle entsteht durch Kopplung schwingungsfähiger Systeme, ihre Ausbreitung erfolgt durch die Elastizität des Mediums. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle hängt daher von den Eigenschaften des Mediums ab. Im Falles des Seils (oder einer Saite) sind das die **Massenbelegung**

$$\mu = \frac{m}{L} \tag{1.21}$$

wobei m die Seilmasse und L die Länge des Seils sind, sowie natürlich die **Seilspannung**

$$\sigma = \frac{F}{A} \tag{1.22}$$

mit der Kraft der Seilspannung F über der Querschnittsfläche A. Dies wird leicht verständlich, wenn man sich vorstellt, wie beim Stimmen einer Gitarre der Ton höher wird, wenn man den Zug an der Saite erhöht. Ebenso haben z.B. die tiefen Klaviersaiten eine metallische Umwicklung, die den Querschnitt erhöhen[3].

Die **Differentialgleichung** der Wellenausbreitung einer Seilwelle ist gegeben durch

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{\sigma} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \tag{1.23}$$

wobei ξ die transversale Auslenkung des Seils, σ die Seilspannung (Zugspannung) und ρ die Dichte des Seils ist. Die **Geschwindigkeit** v der Welle ist dann

$$v = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} = \sqrt{\frac{mg}{\rho A}} = \sqrt{\frac{mg}{\mu}}, \tag{1.24}$$

woraus folgt, dass

$$v \propto \sqrt{m}. \tag{1.25}$$

Die **Laufzeit** der Welle ist entsprechend

$$\Delta t = \frac{2L}{v} = 2L\sqrt{\frac{\mu}{mg}} \tag{1.26}$$

[3] Hierbei handelt es sich um eine Näherung, die unter der Annahme gemacht werden darf, dass der Querschnitt des Seils/der Saite klein ist, so dass es Widerstand nur gegen Dehnung und nicht gegen Biegung gibt. Weiter wird die Schwerkraft vernachlässigt, da der Effekt der Dehnung groß gegenüber der Schwerkraft ist.

1.1.7 Stehende Federwellen

Wird eine Schraubenfeder zum Schwingen angeregt entstehende Longitudinalwellen. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit v dieses Schwingungszustands steht mit Schwingungsfrequenz f und der Wellenlänge λ in folgendem Zusammenhang:

$$v = \lambda \cdot f \tag{1.27}$$

Diese Ausbreitungsgeschwindigkeit nennt man auch *Wellen*- oder *Phasengeschwindigkeit*. An der Schraubenfeder gilt weiterhin:

$$v = \frac{\sqrt{D}}{m_0} \cdot s \tag{1.28}$$

mit D: Federkonstante, m_0: Federmasse und s: Federlänge.

Ist die Feder an beiden Seiten befestigt und wird zum Schwingen angeregt, treten entsprechend an beiden Seiten Reflexionen auf. Die hin- und herlaufenden Wellen überlagern sich. Für bestimmte Anregungsfrequenzen bilden sich stehende Wellen aus, wobei der Abstand zwischen zwei Schwingungsknoten gerade einer halben Wellenlänge entspricht (siehe Abb. 1.4). Für n Schwingungsbäuche gilt entsprechend

$$\frac{\lambda_n}{2} = \frac{s}{n} \quad \text{mit} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{1.29}$$

Aus Gl. (1.27) und (1.28) folgt für die Anregungsfrequenzen

$$f_n = v \cdot \frac{n}{2s} \tag{1.30}$$

bzw.

$$f_n = \frac{\sqrt{D}}{m_0} \cdot \frac{n}{2} \tag{1.31}$$

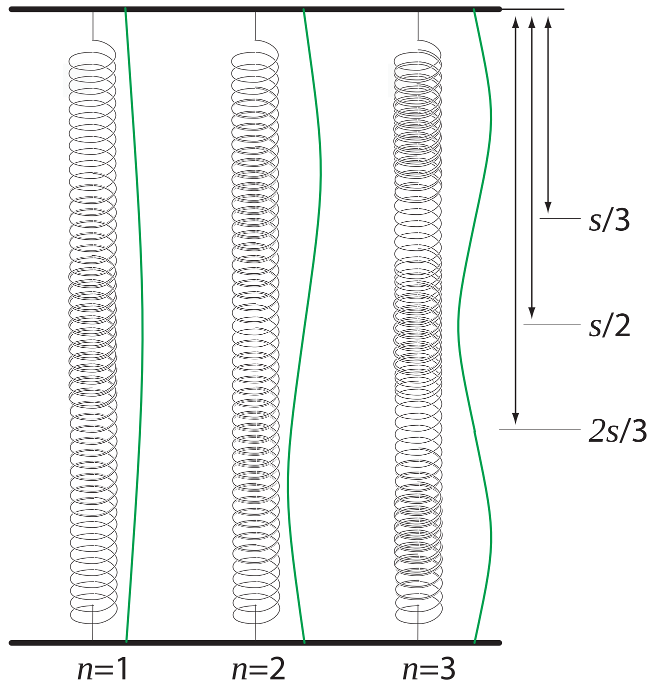

Abbildung 1.4: *Federwelle in Grundschwingung ($n = 1$), erster ($n = 2$) und zweiter ($n = 3$) Oberschwingung*

1.2 Fragen zur Vorbereitung

1. Berechnen Sie die Wellenfunktion für den Fall stehender Wellen nach Gl. 1.17

2. Berechnen Sie Gl. 1.18 für den Fall, dass das Seil an einem Ende fest und am anderen Ende lose ist.

3. Leiten Sie für die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Seilwellen den Zusammenhang

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \tag{1.32}$$

   her (siehe Kapitel 1.1.6)

4. Zeigen Sie, dass für stehende (Seil-)Wellen gilt, dass die Wellenlänge proportional zu $\sqrt{\frac{F}{\mu}}$ ist.

5. Welchen Einfluss hat die Änderung der Federlänge s auf die zur Anregung von n Schwingungsbäuchen notwendigen Frequenzen f_n? (Kapitel 1.1.7)

1.3 Versuchsdurchführung

In diesem Versuch sollen Eigenschwingungen verschiedener schwingungsfähiger Körper (Gummiseil, Feder, Drahtring, Chladnische Körper) beobachtet und deren Abhängigkeit von ihren physikalscihen Eigenschaften untersucht werden.

1.3.1 Gummiband

In diesem Versuchsteil sollen Seilschwingungen (Saitenschwingungen) untersucht werden. Über einen Sinusgenerator wird ein Vibrationsgenerator angesteuert, der ein Seil zum Schwingen anregt (siehe Abb. 1.5). Das andere Ende des Seils („fest eingespannt“) läuft über eine Umlenkrolle zu einem Kraftmesser, über dessen Position die Seilkraft eingestellt werden kann. Variieren Sie die Frequenz

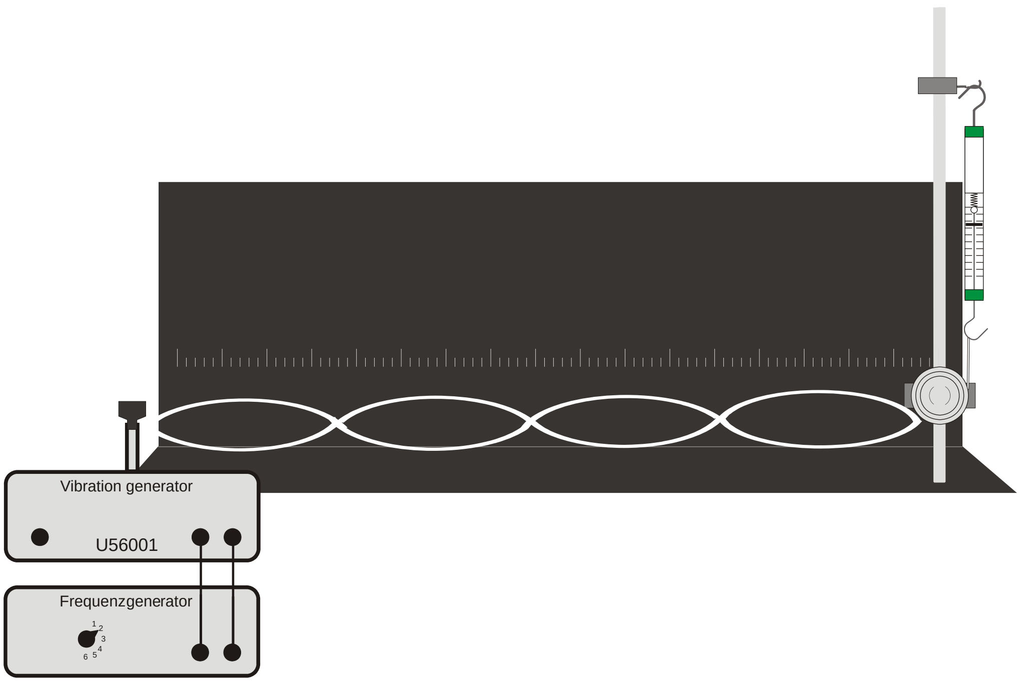

Abbildung 1.5: *Versuchsaufbau zur Aufgabe 1.3.1*

und Anregungsamplitude, um ein Gespür für das Verhalten des Seils zu bekommen. Sobald die Frequenz des Vibrationsgenerators in die Nähe einer Eigenschwingung $f_n = n \cdot \frac{v}{2L}$ kommt, wächst die Amplitude der Welle, es bilden sich stehende Wellen aus.
Das Abzählen der entstandenen Knoten (ohne die Randknoten!) ergibt, um die wievielte Oberschwingung es sich dabei handelt.

Messaufgaben

1. Feste Seilspannung

   a) Messen Sie bei unveränderter Seilspannung möglichst viele Eigenschwingungen des Gummiseils durch Variation der Anregungsfrequenz. Die Seillänge bleibt dabei zwar konstant, bei genauer Betrachtung stellen Sie aber fest, dass fÃ¼r die Reflektion auf einer Seite eine allgemeine Phasenlage, die weder 0 noch π (bzw. 180°) ist, angenommen werden muss. Bestimmen Sie für jede Messung die effektiven Seillänge L_{eff}. Die effektive Seillänge sollte zwischen den am weitesten außen liegenden Knoten angesetzt werden.

   b) Tragen Sie nun die Eigenfrequenzen f_n gegen die Nummer der Eigenfrequenz n auf. Welche Aussage lässt sich daraus ableiten?

   c) Tragen Sie die Eigenfrequenzen f_n gegen n/L_{eff} auf. Welche Aussage lässt sich daraus ableiten?

   d) Welche Fehler müssen bei der Messung berücksichtigt werden?

2. Variation der Seilspannung
   Gehen Sie zurück zur Frequenz, bei der Sie drei Bäuche erhalten haben. Lassen Sie nun diese Frequenz unverändert und verändern Sie die Spannkraft durch gefühlvolles Verschieben des Kraftmessers solange, bis sich stehenden Wellen (maximale Amplituden) mit Wellenlängen $\lambda = 2L/n$ ausbilden.

   a) Erniedrigen bzw. erhöhen Sie langsam die Seilspannung und ermitteln Sie die Kräfte, bei denen sich weitere stehende Wellen mit $n = 2, 3, 4, 5$ Bäuchen ausbilden.

   b) Bestimmen Sie graphisch den Mittelwert der Massenbelegung (siehe Aufgabe 4 in Kap. 1.2). Welche Rolle spielt dabei L?

   c) Ermitteln Sie die Ausbreitungsgeschwindigkeit für die Seilspannungen gem. Gl 1.3

3. Variation der Seilmasse
   Variieren Sie die Seilmasse durch Variation der Seile. Bestimmen Sie die Massebelegung (Seilmasse pro Länge) unabhängig von der Bestimmung aus Aufgabe 2 mit Hilfe eine Waage.

   a) Wiederholen Sie die Aufgabe aus 2a

   b) Tragen Sie die Messdaten so auf, dass erkennbar wird, dass in der Wellengleichung für Seile die Größen Seilkraft F und Massebelegung μ nur als deren Verhältnis F/μ eingehen.

4. Verändern Sie nun bei konstanter Seilspannung die Seillänge L durch das Verschieben des Stegs und stellen Sie pro L je drei Eigenschwingungen ein. Zeigen Sie dass $f_1 \propto \frac{1}{L}$.

1.3.2 Schraubenfeder

Das Phänomen der Stehende Welle kann auch bei Schraubenfedern beobachtet werden. Aus dem Versuchsaufbau gemäß Abb. 1.6 sehen Sie, dass die erzeugten stehenden Wellen am oberen Aufhängepunkt einen Schwingungsknoten haben - am unteren hingegen kann sich kein Knoten ausbilden, da hier die Feder angeregt wird. Beginnen Sie stets im unteren Frequenzbereich und erhöhen Sie f nur

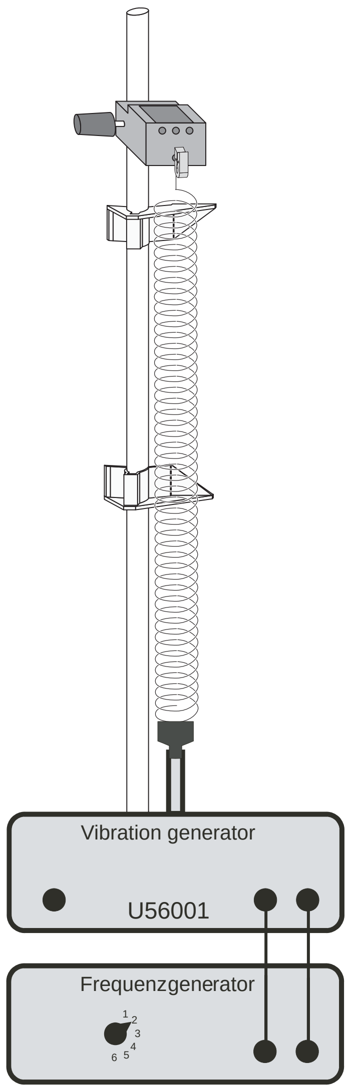

Abbildung 1.6: *Versuchsaufbau zur Aufgabe 1.3.2*

langsam.

Messaufgaben

1. Suchen Sie diejenigen Frequenzen, bei denen sich stehende Wellen ausbilden. Notieren Sie sich die Frequenz und die Nummer der Oberschwingung.

2. Erzeugen Sie eine stehende Welle mit zwei Schwingungsbäuchen (drei Schwingungsknoten) und messen Sie die Wellenlänge λ.

3. Verändern Sie bei gleichbleibender Frequenz langsam die Länge - bleibt die stehende Welle erhalten? Bestimmen Sie bei dieser größeren Länge λ erneut.

1.3.3 Chladnische Klangfiguren

Der deutsche Jurist, Physiker, Astronom und Musiker Ernst Florens Friedrich Chladni beschäftigte sich unter dem Einfluss von Bernoulli und Euler mit experimenteller Akustik. 1787 veröffentlichte er eine Arbeit über akustisch erzeugte Schwingungsmuster, die entstehen, wenn dünne Platten, die mit Sand bestreut sind, in Schwingung versetzt werden.

Messaufgaben

Erzeugen Sie mithilfe des Vibrationsgenerators auf der quadratischen und der runden Platte sog. Chladnische Klangfiguren und skizzieren Sie die Figuren in Ihrem Protokoll. Welchen Zusammenhang gibt es zwischen der Form der Klangfigur und der Anregungsfrequenz?

Abbildung 1.7: *Chladnische Klangfigur mit quadratischer Platte (Uni Kalifornien, San Diego)*

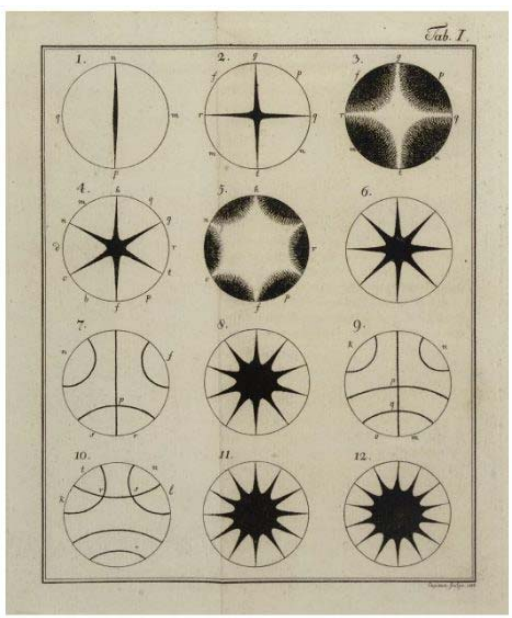

Abbildung 1.8: *Chladnische Klangfigur mit runder Platte (Originalskizze von Chladni)*

1.3.4 Stehende Wellen im Kreisring

Stecken Sie den Ring aus Federstahl auf den Vibrationsgenerator.

Messaufgaben

Fahren Sie die Frequenzen durch und finden Sie die Frequenzen, bei denen sich stehende Wellen bilden. Welche Frequenzen sind das? Welchen Zusammenhang finden Sie zwischen Frequenz und Schwingungsbild?
Beschreiben Sie Ihre Beobachtungen qualitativ.