UNIVERSITÄT REGENSBURG

Fakultät für Physik

Anleitung zum Anfängerpraktikum A2

3 - Gedämpfte freie Schwingung des RLC-Kreises

24. überarbeitete Auflage 2023

Dr. Stephan Giglberger
Prof. Dr. Christian Schüller
Prof. Dr. Jascha Repp

Version 29. April 2023

Inhaltsverzeichnis

Gedämpfte freie Schwingung des RLC-Kreises

1 Einleitung

Aus den Grundvorlesungen und dem Praktikum A1 kennen Sie bereits den harmonischen Oszillator - mit und ohne Dämpfung. Der harmonische Oszillator wird Sie noch im weiteren Verlauf des Studiums weiter begleiten, unter anderem in der Elektrodynamik, der Optik sowie der Struktur der Materie. Dies liegt natürlich daran, dass die dem harmonischen Oszillator zugrundeliegende Differenzialgleichung in ganz unterschiedlichen physikalischen Kontexten in ähnlicher Form auftreten kann.

Die Kombination von Widerstand, Kondensator und Spule führt zu einem *RLC*-Schwingkreis, der ebenfalls durch eine solche Differenzialgleichung beschrieben werden kann und daher einen gedämpften harmonischen Oszillator darstellt.

In diesem Versuch lernen Sie diese Variante des harmonischen Oszillators in eigener Anschauung kennen und können dessen Schwingungsverhalten mit Hilfe des Oszilloskopes anschaulich darstellen.

1.1 Lernziele

- Gedämpfte Schwingung, Dämpfung
- Eigenfrequenz und Veränderung der Eigenfrequenz bei Dämpfung
- Güte eines gedämpften Oszillators

1.2 Vorkenntnisse

- Grundlagen der Differenzialgleichung des harmonischen Oszillators (Vorlesungen)
- Umgang mit einfachen elektronischen Bauelementen (Versuch 1)
- Umgang mit dem Oszilloskop (Versuch 2)

2 Grundlagen

2.1 Differenzialgleichung des harmonischen Oszillators

Aus der Mechanik wissen Sie, dass der ungedämpfte harmonische Oszillator durch ein Federpendel gegeben ist dessen Bewegungsgleichung durch Newtons zweite Gleichung und das Hooksche Gesetz

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F = -kx$$

gegeben ist. Eine Dämpfung kann je nach physikalischer Ursache ganz unterschiedlich in Erscheinung treten, wird jedoch üblicherweise als zusätzliche, geschwindigkeitsproportionale Kraft berücksichtigt

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx - 2\gamma m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$

Die Größen m, k und γ stehen hier für Masse, Federkonstante und Dämpfung, können aber in allgemeinerem Kontext einfach als Parameter der allgemeineren Differenzialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x + 2\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0.$$

aufgefasst werden.

Eine Lösung des gedämpften harmonischen Oszillators für moderate Dämpfung (d. h. $\omega_0 > \gamma$) lautet

$$x(t) = x_0\cos(\omega t + \varphi)\exp(-\gamma t),$$

wobei der Exponentialterm im ungedämpften Fall entfällt. Die Kreisfrequenz im ungedämpften Fall ist $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, im gedämpften Fall $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

2.2 Der elektrische Schwingkreis

Wie der Titel dieses Versuches schon vermuten lässt, enthält der hier verwendete Schwingkreis drei Bauelemente, einen Widerstand, eine Spule, und einen Kondensator.

Die Selbstinduktivitiät L der Spule bewirkt bei einer zeitlichen Stromänderung eine Induktionsspannung U_L gemäß

$$U_L(t) = L\frac{\mathrm{d}I_L}{\mathrm{d}t}$$

Beim Kondensator ergibt sich aus den Zusammenhängen $Q = CU_C$ und $I_C = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$ die Gleichung

$$I_C = C\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

Abbildung 1: LC-Schwingkreis (links) und RLC-Parallelschwingkreis (rechts).

Schließt man Spule und Kondensator parallel, so ist $U_L = U_C = U_{LC}$ und $I_L = -I_C = I_{LC}$ und es ergibt sich

$$U_{LC} = -LC\frac{\mathrm{d}^2 U_{LC}}{\mathrm{d}t^2}$$

Durch Vergleich zum mechanischen Fall erkennt man sofort, dass dies einen harmonischen Oszillator mit der Kreisfrequenz $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ ergibt.

Durch Einfügen eines Widerstandes in den Schwingkreis ergibt sich ein Dämpfungsterm. Anders als im Verlauf des Versuches, möchten wir zunächst die drei Bauelemente Widerstand, Spule, und Kondensator parallel schalten, so dass $U_L = U_C = U_R = U_{RLC}$ und $I_L + I_C + I_R = 0$ ist. Man erhält daraus die Differenzialgleichung

$$U_{RLC} = L\frac{\mathrm{d}I_L}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}I_C + I_R}{\mathrm{d}t} = -LC\frac{\mathrm{d}^2 U_{RLC}}{\mathrm{d}t^2} - LR\frac{\mathrm{d}U_{RLC}}{\mathrm{d}t}$$

in voller Analogie zur mechanischen Variante mit $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ und $2\gamma = R/C$. Beachten Sie, dass Sie später in diesem Versuch mit einer anderen Variante des RLC-Kreises arbeiten werden. Sie müssen also obige Überlegungen entsprechend anpassen.

3 Fragen zum Versuch

1. Betrachten Sie Lade- und Entladevorgang eines Kondensators C über einen Widerstand R. Stellen Sie für beide Vorgänge die Differentialgleichungen für die Spannung $U(t)$ am Kondensator und den Strom $I(t)$ durch den Widerstand auf und lösen Sie sie.

2. Abbildung 2 zeigt die exponentielle Abnahme der Spannung $U(t)$ beim Entladevorgang eines Kondensators mit der Zeit.
   Unter der Zeitkonstanten τ versteht man die Zeit, nach der U auf den Bruchteil 1/e ($\approx$ 37%) seines Anfangswertes abgefallen ist.
   Welche Steigung hat die Tangente im Punkt $t = 0$?
   Welches Verhältnis besteht zwischen der Zeitkonstanten τ und der Halbwertszeit $T_{1/2}$?

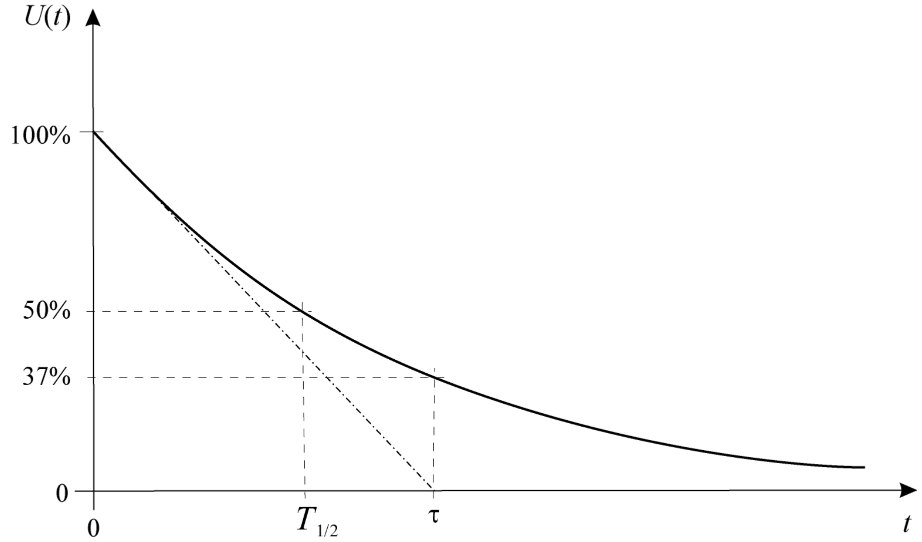

Abbildung 2: Verlauf der Spannung beim Entladevorgang.

3. Zur Messung von $U(t)$ benutzt man einen Spannungsmessinstrument mit endlichem Innenwiderstand R_{I}. Wie ändert sich dadurch die Zeitkonstante τ des Abklingens der Spannung $U(t)$?

4. Der in Abb. 3 abgebildete RLC-Schwingkreis ist eine Erweiterung des RC-Kreises. Stellen Sie die entsprechende Differenzialgleichung für den Strom I im Kreis auf. Bestimmen Sie durch Einsetzen der Beziehung $I = I_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\cos(\omega t + \varphi)$ in die Differenzialgleichung die Abklingdauer τ und die Kreisfrequenz ω der Schwingung.
   Bestimmen Sie aus den Anfangsbedingungen $U_C(t = 0) = U_0$ und $I(t = 0) = 0$ die Phase φ und näherungsweise (für schwache Dämpfung $1/\tau \ll \omega$) die Amplitude der Stromoszillation I_0.
   Welche Analogien lassen sich zur mechanischen Schwingung ziehen?

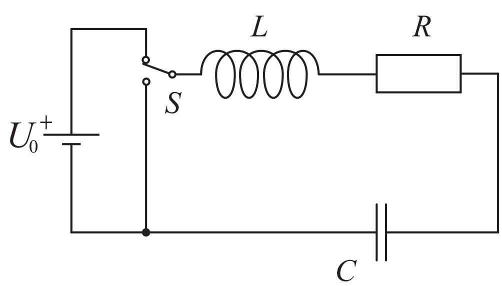

Abbildung 3: RLC- (Serien-) Schwingkreis

5. Wie groß sind Frequenz ν und Schwingungsdauer T des Schwingkreises für $C = 22\,\mathrm{nF}$, $L =$

0,05 H und $R = 0\,\Omega$?

6. Bestimmen Sie die Abklingdauer τ für $R = 10\,\Omega$.

7. Stellen Sie auf doppeltlogarithmischem Papier die Abhängigkeit der Schwingungsdauer T von der Kapazität C (zwischen 100 pF und 1 μF) für $L = 0{,}05$ H und $R = 0\,\Omega$ dar und **bringen Sie diese Darstellung zur Versuchsdurchführung mit**.

4 Hinweise zum Versuchsaufbau

In diesem Versuch wird eine besondere Sorte des Kondensators verwendet: ein sogenannter Elektrolytkondensator, kurz Elko. Dieser hat die Besonderheit, dass er nur bei einer Polarität betrieben werden darf. In einem Elektrolytkondensator bildet sich durch elektrochemische Prozesse an der Anode (dem Pluspol) und dem Elektrolyt eine extrem dünne Oxidschicht aus, die als Dielektrikum fungiert. Da die Oxidschicht so dünn ist, haben Elektrolytkondensatoren in Relation zu ihrer Größe eine große Kapazität, was auch den Grund für die Verwendung in diesem Versuch darstellt. Der Nachteil besteht jedoch darin, dass bei Umpolung der Spannung das Dielektrikum zerstört wird. Achten Sie daher stets auf die richtige Polarität.

Sie verwenden in diesem Versuch den *x*-*y*-Schreiber, der Ihnen aus dem A1-Praktikum bekannt ist.

5 Aufgabenstellung

5.1 Der RC-Kreis

1. Bauen Sie auf einem Steckbrett die in Abb. 4 dargestellte Schaltung auf. Verwenden Sie als Spannungsquelle ein Netzgerät und einen Kondensator mit $C = 2000\,\mu$F. Legen Sie eine Spannung von $U = 5$V an. Entladen Sie den Kondensator C, indem Sie den Schalter S in die untere Stellung bringen. Legen Sie nun den Schalter erneut um und beobachten Sie den Ausschlag des Voltmeters während des Ladevorgangs des Kondensators. Wählen Sie R so, dass die Lade- und

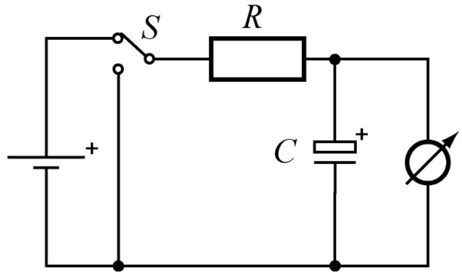

Abbildung 4: Laden und Entladen des Kondensators

Entladezeiten mehr als 10 Sekunden dauern. Zeichnen Sie eine Lade- und Entladekurve mittels eines x-y-Schreibers auf, den Sie im A1-Praktikum kennen gelernt haben. Da insgesamt zwei x-y-Schreiber zur Verfügung stehen, sollte dieser Aufgabenteil mit mehreren Zweiergruppen unter direkter Anleitung eines Betreuers erfolgen. Zeichnen Sie so viele Kurven auf, dass jede Zweiergruppe ein Exemplar bekommt. Schließen Sie den x-y-Schreibers parallel zum Voltmeter an. Falls Ihnen kein Schreiber zur Verfügung steht, können Sie alternativ alle 3 Sekunden den Spannungswert ablesen und notieren. Verändern Sie während der Messung auf keinen Fall den Messbereich des Multimeters. Halten Sie im Protokoll fest, warum eine Änderung des Messbereiches nachteilig wäre. Bestimmen Sie anhand der Messungen die Zeitkonstante τ der Anstiegs- **und** Abklingkurve. Wenn Sie mit dem x-y-Schreiber gearbeitet haben, bestimmen Sie τ aus der Anfangssteigung der Graphen. Falls Sie Messwerte mit dem Multimeter notiert haben, tragen Sie die Messwerte halblogarithmisch auf und bestimmen Sie die Steigung. Bestimmen Sie daraus R_I. Machen Sie eine Fehlerbetrachtung, die Sie im Protokoll festhalten.

2. Nun soll das Lade- und Entladeverhalten auf kürzerer Zeitskala beobachtet werden. Dazu werden Spannungsquelle und Wechselschalter ersetzt durch ein Rechtecksignal eines Funktionsgenerators, der so eingestellt werden sollte, dass die Spannung periodisch zwischen 0 und 5 V wechselt. Das Voltmeter wird ersetzt durch ein Oszilloskop, wie in Abb. 5 links gezeigt.

   Überlegen Sie, ob am Kondensator nur eine Polarität der Spannung auftreten kann, oder beide Polaritäten. Falls beide Polaritäten auftreten können, verwenden Sie **keinen** Elektrolytkondensator.

   Überprüfen Sie mit diesem Versuchsaufbau, ob die in der Vorbereitung hergeleitete Beziehung $\tau = R \cdot C$ auch für sehr kleine Abklingzeiten τ (im Bereich von 10^{-2} s bis 10^{-6} s) gilt. Verwenden Sie dazu einen der zur Verfügung stehenden Kondensatoren, wählen Sie willkürlich eine Zeitkonstante im oben genannten Bereich und berechnen den Wert des dazu benötigten Widerstands. Überlegen Sie sich, welche Zeit- bzw. Frequenzeinstellungen am Oszilloskop und am Funktionsgenerator für die jeweilige Zeitkonstante sinnvoll sind. Bestimmen Sie τ und vergleichen Sie mit dem erwarteten Wert. Die Halbwertszeit $T_{1/2}$ ist am Oszilloskop einfacher abzulesen als τ.

3. Bauen Sie danach die rechte der Schaltungen in Abb. 5 auf. Schreiben Sie auch hierfür die entsprechende Differenzialgleichung auf. (Verwenden Sie dazu Gleichung 1.) Man kann die linke Schaltung als analogen Integrator und die rechte Schaltung als analogen Differentiator auffassen. Spiegeln die Differnzialgleichungen dies wieder? Und wenn ja, inwiefern? Dieser Umstand sollte im Protokoll kurz Erwähnung finden. Sofern Sie dieselben Bauelemente verwendet haben, ist auch das Produkt RC, das die Dimension einer Zeitskala hat, in beiden Fällen gleich. Wie drückt sich die charakteristische Zeitskala in dem, was Sie auf dem Oszilloskop

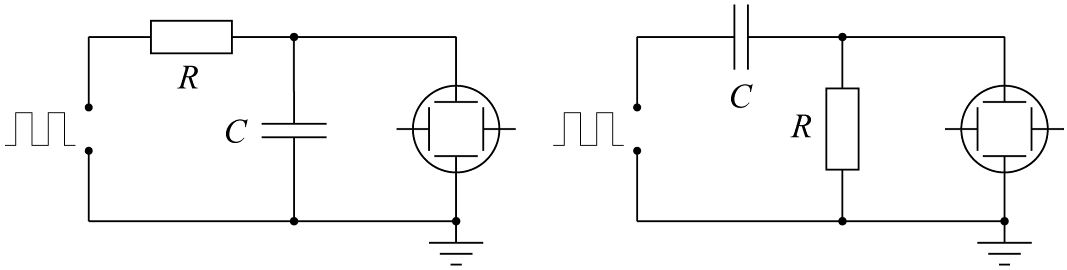

Abbildung 5: Überprüfung der Gleichung für die Zeitkonstante τ

sehen, aus?

5.2 Der RLC-Kreis

Der im Abschnitt 3 behandelte Serienschwingkreis soll nun ebenfalls auf schnellen Zeitskalen untersucht werden.

Ein elektrischer Schalter (Relais), der von einem Funktionsgenerator mit Rechteckpulsen angesteuert wird (ca. $12V_{pp}$ mit ca. 10 - 20 Hz), stellt in periodischen Zeitabständen die Anfangsbedingungen her. Beachten Sie, dass das Signal der Rechteckpulse zwischen den Spannungen 0 V und 12 V wech-

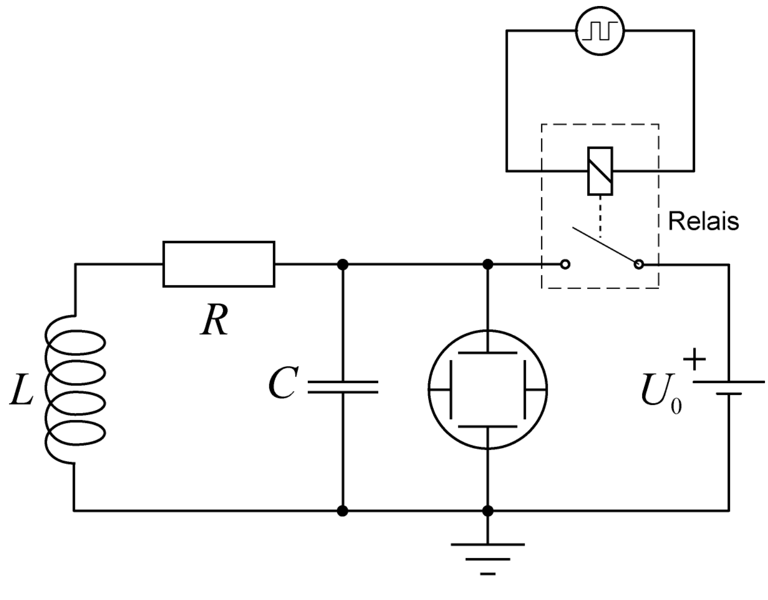

Abbildung 6: gedämpfter RLC-Schwingkreis mit periodischem Rücksetzen der Anfangsbedingungen: über das Relais wird in regelmäßigen Abständen die Spannung U_0 am Schwingkreis angelegt

seln muss, und **nicht** etwa symmetrisch um die Null zwischen -6 V und +6 V. Im letzteren Fall klickt das Relais zwar bei jedem Nulldurchgang, schaltet aber in beiden Phasen des Rechtecks durch. Falls Sie unsicher sind oder die Schaltung nicht funktionieren sollte, sollten Sie sich zunächst mit einem Birnchen anstelle des Schwingkreises vergewissern, dass das Relais korrekt die Spannung U_0 ein-und ausschaltet. Für die Spannung U_0 ist 0,5… 2V ein passender Bereich.

Hinweise:

Beachten Sie die Unterschiede in den Schaltungen in Abb. 3 und 6. Die Versuchsdurchführung deckt sich nicht mit der Lösung der Aufgabe 1, weil bei geschlossenem Relais (Abb. 6) der Strom über Widerstand und Spule fließt. Beim Öffnen des Relais wird der Strom unterbrochen und es wird eine große Spannung $U_{ind} \gg U_0$ induziert, deren Abklingen man beobachtet.

Überlegen Sie wie oben, ob am Kondensator nur eine Polarität der Spannung auftreten kann, oder beide Polaritäten. Falls beide Polaritäten auftreten können, verwenden Sie **keinen** Elektrolytkondensator.

1. Messen Sie am Oszillographen die Schwingungsdauer T für verschiedene Werte von C mit $L = 0{,}05\,\mathrm{H}$ und $R = 0\,\Omega$. Bitte verwenden Sie zum Schutz vor Kurzschlüssen die Schaltung zunächst mit Widerstand auf, der dann bei funktionierender Schaltung mit einem Kabel überbrückt werden soll. Tragen Sie die Messpunkte in das vorbereitete Diagramm (Aufgabe 7 in 3) ein. Jedes Element in der Schaltung, d. h. nicht nur der Kondensator, hat eine gewissen Kapazität. Überlegen Sie, welche Kapazitäten Sie getrost vernachlässigen können und welche nicht, und halten Sie diese Überlegung im Protokoll fest. Wie groß ist die Kapazität, die Sie berücksichtigen müssen quantitativ? Erklärt diese die Abweichungen von der berechneten Kurve für kleine Kapazitäten C?

2. Messen Sie bei festem L und C (z. B. 0,05 H und 22 nF) die Abklingdauer τ und tragen Sie $1/\tau$ in Abhängigkeit von R auf. Variieren Sie R von $0\,\Omega$ bis $100\,\Omega$. Bestimmen Sie den Gleichstromwiderstand R_G der Spule graphisch aus dem Schnittpunkt der Geraden mit der Abszisse (x-Achse).