

Entwurf für einen Übersichtsartikel im Physik Journal

– Die endgültige Fassung ist im Physik Journal **21** (3), S. 35 (März 2022) erschienen –

<https://www.pro-physik.de/physik-journal/maerz-2022>

Die Verschränkung von Chaos und Quantendynamik

Echos und out-of-time-order-correlators vermessen die Ausbreitung von Quanteninformation in komplexen Vielteilchensystemen

Klaus Richter (Universität Regensburg)

In einer wenig beachteten, aber weit vorausschauenden Arbeit wies Albert Einstein schon 1917 darauf hin, dass die dem Bohrschen Atommodell zu Grunde liegende Bohr-Sommerfeldsche Quantisierung der elliptischen Elektronenbahnen für nicht-integrable Systeme auf gravierende konzeptionelle Schwierigkeiten stößt [1]. Und in der Tat ist dann die „alte Atomtheorie“, die sich beim Wasserstoffatom als so erfolgreich erwiesen hatte, vor 100 Jahren beim Versuch einer Verallgemeinerung auf kompliziertere atomare und molekulare Systeme gescheitert.

Es dauerte dann ein weiteres halbes Jahrhundert bis Martin Gutzwiller in einer Serie von bahnbrechenden Arbeiten [2] eine methodische Brücke zwischen der klassischen und Quantenmechanik nicht-integrabler Systeme schlug, genauer: der chaotischen Dynamik eines Teilchens in einem klassischen System und dem Energieniveau-Spektrum des dazu korrespondierenden Quantensystems¹. Während Bohrs „alte Atomtheorie“ auf *ad hoc*-Annahmen beruhte, entwickelte Gutzwiller eine konsistente semiklassische Theorie. In deren Rahmen ließ sich zum einen der Erfolg der alten Atomtheorie für integrable Systeme mit stabilen klassischen Bahnen einordnen; zum anderen aber wurde dem allgemeineren nicht-integrablen Fall adäquat Rechnung getragen, dass sich die klassische Bewegung häufig nichtlinear chaotisch vollzieht.

Diese Arbeiten initiierten und beflügelten das Gebiet des „Quantenchaos“, das zu ergründen versucht, welche Signaturen klassische chaotische Dynamik in der Quantenmechanik beim Übergang von der Makro- zur Mikrowelt hinterlassen [3,4]. Während man diesen fundamentalen Fragen lange an Hand von konzeptionell einfachen, aber in ihrer Ausprägung komplexen Einteilchen-Modellen nachging, rücken seit einigen Jahren Vielteilchensysteme unter dem Schlagwort „Vielteilchen-Quantenchaos“ in verschiedensten Forschungsfeldern – von der Kondensierten Materie bis hin zur Quantengravitation – in den Blickpunkt des Interesses, s. Abb. 1. Was verbindet nun aber beispielsweise Thermalisierung, die Leitfähigkeit korrelierter Festkörper oder der scheinbare Informationsverlust in schwarzen Löchern? Bei allen diesen aktuellen Themen spielt die zeitliche Propagation von

¹ Dafür wurde M. Gutzwiller 2003 mit der Max Planck-Medaille der DPG ausgezeichnet.

Quanteninformation in Vielteilchensystemen, ihre Ausbreitung in die Weiten der riesigen Vielteilchen-Hilberträume und damit de facto ihr Verlust, eine zentrale Rolle. Das geschieht, wie wir sehen werden, im Übergangsbereich zwischen klassischem Chaos und komplexer Quantendynamik.

Quanten-Schmetterlingseffekt

Was ist nun mit dem populären Schlüsselbegriff „Vielteilchen-Quantenchaos“ gemeint, und zwar über die lapidare umgangssprachliche Aussage hinaus, dass sich ein wechselwirkendes System „irgendwie chaotisch“ verhält? Chaos in der klassischen Physik assoziiert man häufig plakativ mit dem Begriff „Schmetterlingseffekt“: Kleinste Änderungen der Anfangsbedingungen eines nichtlinearen Systems wirken sich in exponentieller Weise auf dessen Entwicklung aus: Kann also beispielsweise der Flügelschlag eines Schmetterlings in Brasilien einen Tornado in Texas auslösen? Quantenchaos in Vielteilchensystemen beschäftigt sich unter anderem mit der Frage, ob korrespondierende „Quanten-Schmetterlingseffekte“ existieren: Wie schnell breitet sich beispielsweise eine mit einer Messung inhärent verbundene Störung in einem komplexen Quantensystem aus, z.B. in einem Gas aus ultrakalten Atomen oder in Netzwerken gekoppelter Qubits? Wie robust oder fragil reagiert ein solches Vielteilchensystem auf elementare Qubit-Operationen oder aber auf unabdingbare äußere Einflüsse? Derartige Fragen sind nicht nur von fundamentalem Interesse, sondern möglicherweise auch für zukünftige Quantentechnologien essentiell, wie die aktuelle Studie [5] zeigt.

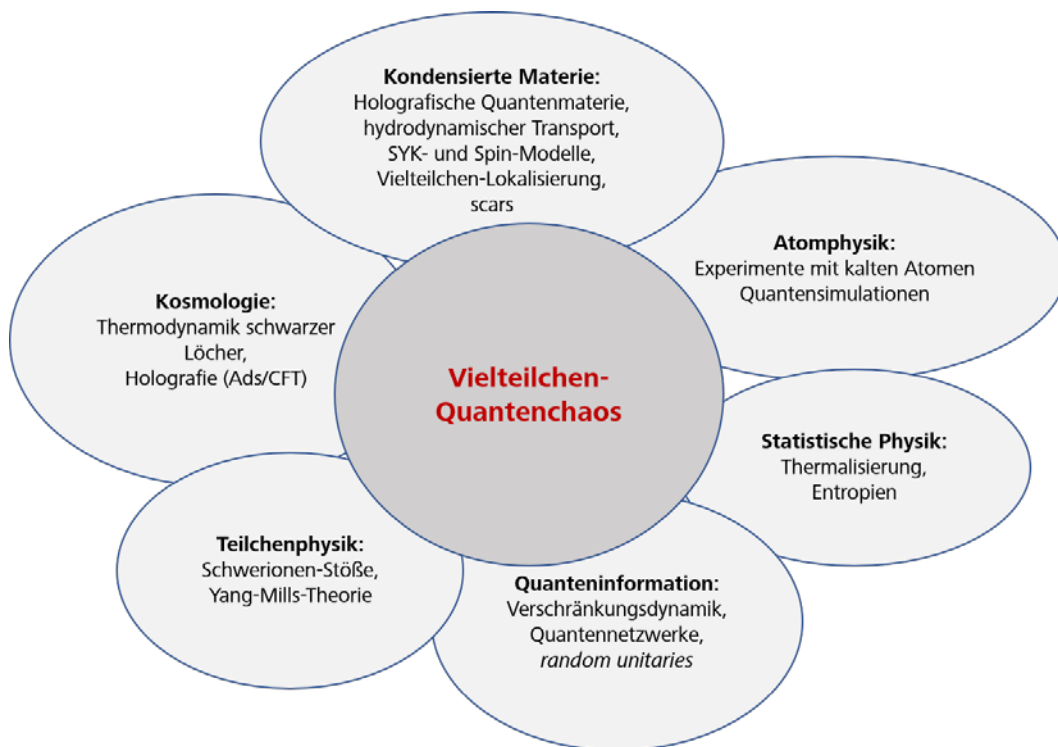


Abb. 1: Vielteilchen-Quantenchaos an der Schnittstelle verschiedenster aktueller Forschungsfelder.

Wie lässt sich nun messen bzw. quantifizieren, wie sensitiv ein Quantensystem auf Störungen reagiert? Angenommen, man könnte nach einer anfänglichen Zeitenwicklung bis zum Zeitpunkt t die Zeit gewissermaßen „zurückdrehen“, d.h. das System in einer Art Quantenzeitmaschine [6] um die Zeit $-t$ zurückpropagieren und den sich ergebenden Zustand dann mit dem Anfangszustand vergleichen. Durch ein derartiges Echo-Experiment ließe sich aus der Größe des Echos, des Überlapps zwischen Anfangs- und Endzustand, auf den Einfluss von externen Störungen auf die Vielteilchen-Quantendynamik während der Vor- und Rückpropagation schließen.

Derartige Überlegungen berühren Kernaspekte der Reversibilität in der Statistischen Physik und lagen schon der berühmten Loschmidt-Boltzmann-Kontroverse hinsichtlich der Ausbildung eines Zeitpfeils zu Grunde: Gegen die Boltzmannsche Annahme des Entropiewachstums führte Loschmidt 1876 als Paradoxon ins Feld, dass sich aufgrund der Umkehrbarkeit mikroskopischer physikalischer Gesetze und Prozesse ein Vielteilchensystem durch instantanes Umdrehen der Richtungen aller Teilchengeschwindigkeiten bei weiter fortschreitender Zeit wieder exakt in den Ausgangszustand bewegen sollte, was einem Zurückdrehen der Zeit gleichkäme. Die Auflösung des Loschmidt-Paradoxons führt uns direkt zur Rolle von Vielteilchenchaos: Während Loschmidts Gedankenexperiment jedwede Störung ausschließt, macht in klassischen Vielteilchensystemen selbst die kleinste, unvermeidbare externe Störung durch den Schmetterlingseffekt die von Loschmidt postulierte Reversibilität zunichte. Und überhaupt: Wie ließe sich in der Praxis die Zeit zurückdrehen?

Ein Paradebeispiel dafür ist das Spin-Echo Protokoll, in dem die Dynamik eines Elektronenspins im Magnetfeld dadurch umgedreht werden kann, dass man durch einen sogenannten π -Puls die Spin-Orientierung bzgl. des Magnetfeldes invertiert, was de facto eine Rückpropagation trotz weiter fortschreitender Zeit bewirkt. In solchen Spin-Echo-Experimenten probt man allerdings, wenn auch gemittelt über ein Ensemble unabhängiger Spins, Reversibilität und Störungen der Quantendynamik einzelner Teilchen.

Wie lässt sich nun aber die fragile Stabilität eines korrelierten Vielteilchen-Quantensystems ermitteln, beispielsweise vieler gekoppelter und verschränkter Spins oder Qubits? Das ggfs. durch Messung bedingte und durch einen Operator A beschriebene Flippen eines einzelnen Spins stört – wie der Flügelschlag des Quanten-Schmetterlings – das Gesamtsystem, wie in Abb. 2 illustriert. Die Ausbreitung dieser lokalen Störung lässt sich mit Hilfe einer zweiten Spin-Messung (mit Hilfe eines Operators B) in gewissem Abstand von A detektieren. Quantenmechanisch lässt sich das durch sogenannte *Out-Of-Time-Order-Commutators* (OTOCs) $C(t) = \langle [A(t), B]^2 \rangle$ quantifizieren, siehe Infobox 1, die schon vor über 50 Jahren in der Festkörpertheorie eingeführt wurden [7]. OTOCs, die zur Entropie verwandte Züge tragen, sorgen aktuell für erhebliche Aufmerksamkeit [6,8]: Sie messen „*scrambling*“ in Vielteilchensystemen. Das heißt, wie rapide sich die mit der Operation A einhergehende, lokal generierte Quanteninformation, z.B. durch Spin-Flip, als Störung in die exponentiell vielen Freiheitsgrade des Hilbertraums des wechselwirkenden Vielteilchensystems ausbreitet und wie schnell damit einhergehend quantenmechanische Verschränkung erzeugt wird.

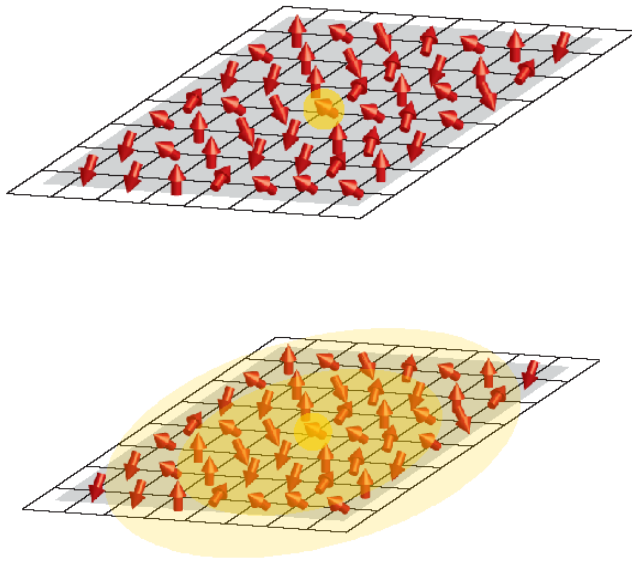


Abb 2: Scrambling und die Propagation von Quanteninformation in einem Gitter aus gekoppelten Spins | Die mit dem „Flippen“ eines verschränkten Spins lokal generierte Information (a) breitet sich dynamisch über die unermesslich vielen Freiheitsgrade eines Spin-Gitters aus und erzeugt massive Verschränkung (b).

OTOCs, mit Hilfe derer inzwischen Google die Effizienz von Netzwerken aus Quantenprozessoren erprobt [5], sind in das Visier der Quantenchaosforschung geraten, weil sie sich als rein quantenmechanische Konstrukte dennoch direkt mit dem klassischen Lyapunov-Exponent λ assoziieren lassen, der das exponentielle Wachstum $\Delta e^{\lambda t}$, einer anfänglichen Störung Δ in einem chaotischen klassischen System beschreibt: den Schmetterlingseffekt. Für ein quantenmechanisches Einteilchensystem, wie beispielsweise ein Teilchen in einem „Quantenbillard“ in Abb. 3, liefert ein in der Info-Box zusammengefasstes heuristisches Argument, dass im semiklassischen Limes kleiner Wellenlänge der quantenmechanische OTOC tatsächlich wie $e^{2\lambda t}$ anwächst und damit den vielleicht unmittelbarsten Zusammenhang zwischen klassischem Chaos und Quantenphysik darstellt; hier: zwischen klassischem und Quanten-Schmetterlingseffekt.

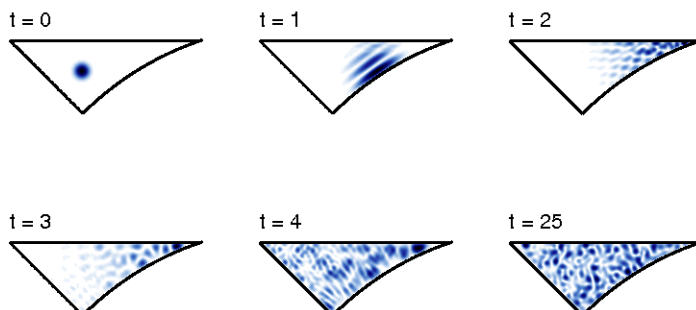


Abb.3: Dynamik im chaotischen Quantenbillard | Ein Wellenpaket (mit blau markierter Wahrscheinlichkeitsdichte) bewegt sich gemäß der Ehrenfest-Gleichungen nur kurz nach rechts entlang der instabilen klassischen (rot markierten) Bahn, ehe nach der Ehrenfestzeit t_E der Zustand dann durch Wellenchaos-dominierte Interferenz gekennzeichnet ist (Zeitschritte t in Einheiten von t_E , s. Text; Abb.: A. Goussev).

Info-Box: Out-of-time-order-commutators (OTOCs)

Quantenmechanisch lässt sich die Größe einer lokalen Störung, die einhergeht mit einer lokalen Messung einer Observablen A , beispielsweise mit einem Spin-Flip in Abb. 2(a), durch das Anwachsen des zeitabhängigen Heisenberg-Operators $A(t) = e^{iHt} A e^{-iHt}$ berechnen, dessen Struktur eine enge Analogie zum Schmetterlingseffekt aufweist: Die Operation $A(t)$ lässt sich interpretieren als die sukzessive Vorwärtspropagation e^{-iHt} eines Vielteilchen-Zustands des Hamilton-Operators H , die dann zum Zeitpunkt t erfolgende Störung A und anschließende Rückpropagation e^{iHt} ; auch das Zurückdrehen der Zeit ist also implementiert! Das Anwachsen des Operators $A(t)$ kann man mit Hilfe eines zweiten Operators B an einem anderen Ort messen. Dieser Vorgang lässt sich durch den komplizierteren *Out-of-Time-Order-Correlator* $e^{iHt} A e^{-iHt} B e^{iHt} A e^{-iHt} B$ quantifizieren, welcher abwechselnd zwei Vor- und Rückpropagationen enthält, bzw. dem Erwartungswert eines damit eng verwandten quadrierten Kommutators, des sogenannten *Out-of-Time-Order-Commutators* (OTOC) $C(t) = \langle [A(t), B]^2 \rangle$ [6-8]. Er ist anfänglich Null und wächst schnell, wenn die sich ausbreitende, durch A verursachte Störung den Ort des Operators B erreicht. Das lässt sich für den Spezialfall von Orts- und Impulsoperatoren X und P dadurch heuristisch erklären, dass man den quantenmechanischen Kommutator $[X(t), P]$ durch die klassische Poisson-Klammer $i\hbar\{x(t), p\} = i\hbar dx(t)/dx(0) \sim i\hbar e^{\lambda t}$ mit klassischem Lyapunov-Exponenten λ ersetzt. Das Quadrat des Kommutators, also der OTOC, skaliert dann wie $C(t) \sim e^{2\lambda t}$.

Semiklassik: Schnittstelle zwischen klassischen und Quantenwelten

Gilt dieses Einteilchen-Szenario nun auch für Quanten-Vielteilchensysteme, und was bedeuten in diesem Fall Begriffe wie „Lyapunov-Exponent“? Hier kommen naturgemäß semiklassische Theorien a la Gutzwiller [2,4] ins Spiel; allerdings muss man sich fragen, was überhaupt ein „semiklassischer Limes“ für viele Teilchen besagt?

Für Einteilchensysteme wie das Bohrsche Atom oder das erwähnte Quantenteilchen im Billard (Abb. 3) ist das semiklassische Übergangsregime von der Wellenmechanik zur Teilchendynamik gekennzeichnet durch hohe Anregungsenergien, respektive große Teilchenimpulse p . Das entspricht nach de Broglie kleinen Wellenlängen $\lambda_{dB} = h/p$, wobei h das Plancksche Wirkungsquantum darstellt. In diesem Energiebereich lässt sich nach Gutzwiller der quantenmechanische Propagator U im Sinne Feynmans als Summe über Beiträge aller klassischen Pfade p vom Anfangspunkt x zum Endpunkt x' im Ortsraum approximieren [2,4]:

$$U(x, 0; x', t) = \langle x' | e^{-iHt} | x \rangle = \sum_p A_p e^{iS_p/\hbar} . \quad (1)$$

Hier ist S_p die Wirkung und A_p eine die Instabilität der jeweiligen Teilchenbahn widerspiegelnde Amplitude. Der Propagator (1) heißt semiklassisch, da die Trajektorien p und Einträge S_p und A_p rein klassisch sind, aber die kohärente Summation der Phasen S_p/\hbar quantenmechanische Interferenz implementiert. Aus dem zentralen Objekt U in Gl. (1) lassen sich viele quantenmechanische Größen wie Spektren [3,4], Leitfähigkeiten – und wie unten gezeigt insbesondere auch Echoes und OTOCs – berechnen und dadurch direkt mit chaotischen Eigenschaften des klassischen Pendants in Beziehung setzen.

Für sehr kurze Zeiten kann man die quantenmechanische Zeitentwicklung durch U mittels einer einzigen Trajektorie approximieren, was Interferenz ausschließt und der klassischen Näherung einer wohldefinierten Teilchenbahn entspricht. Auf der Zeitskala der sogenannten Ehrenfest-Zeit t_E bricht diese Näherung jedoch zusammen. Wie in Abb. 3 am Beispiel eines zerfließenden Wellenpakets im Quantenbillard deutlich wird, ist die Quantendynamik für Zeiten $t > t_E$ durch Interferenz geprägt, was semiklassisch die Berücksichtigung einer zunehmenden Zahl von Pfaden in Gl. (1) erfordert. Die Ehrenfest-Zeit als fundamentale Zeitskala an der Schwelle zwischen klassischer Bewegung und Interferenz-dominiertes Quantendynamik skaliert mit $t_E = 1/\lambda \ln(S_p/\hbar)$. Hier ist λ der eingangs erwähnte klassische Lyapunov-Exponent. Im semiklassischen Limes gilt $\hbar/S_p \ll 1$: Klassische Wirkungen sind viel größer als das Wirkungsquantum \hbar , weshalb dieser Grenzfall oft auch mit „ $\hbar \rightarrow 0$ “ charakterisiert wird. In diesem Limes divergiert die Ehrenfestzeit: die Zeitskala, an der Wellenphänomene einsetzen, verschiebt sich immer mehr zu Gunsten von klassischer Teilchenbewegung mit zumeist nichtlinearer Dynamik. Dieser Übergang mit „ $\hbar \rightarrow 0$ “ ist in Abb. 4 in horizontaler Richtung dargestellt.

Neben diesem üblichen semiklassischen Einteilchen-Limes gibt es in Vielteilchen-Quantensystemen den dazu komplementären thermodynamischen Limes großer Teilchenzahl N . Tatsächlich lässt sich dieser Limes formal auch als semiklassisch auffassen, mit effektiver Planck-Konstante $\hbar_{eff} = \hbar/N \rightarrow 0$, wenn man von Vielteilchen-Systemen auf der Ebene der Quantenfeldtheorie ausgeht, bei der die Wellenfunktionen in „2. Quantisierung“ durch Feldoperatoren ersetzt wurden. Im makroskopischen Grenzfall bei $N = \infty$ gehen die Gleichungen für diese Quantenfelder über in nichtlineare Wellengleichungen, s. vertikale Richtung in Abb. 4. Beispielsweise werden Systeme wechselwirkender bosonischer kalter Atome für $N = \infty$ durch die sogenannte Gross-Pitaevskii-Gleichung, eine nichtlineare Schrödingergleichung, beschrieben. Diese, wie auch die übliche Schrödingergleichung (1. Quantisierung), erscheint somit aus der Perspektive der Quantenfeldtheorie (2. Quantisierung) gewissermaßen auch als „klassisch“, wenn auch eine Ebene höher angesiedelt als der übliche semiklassische Limes.

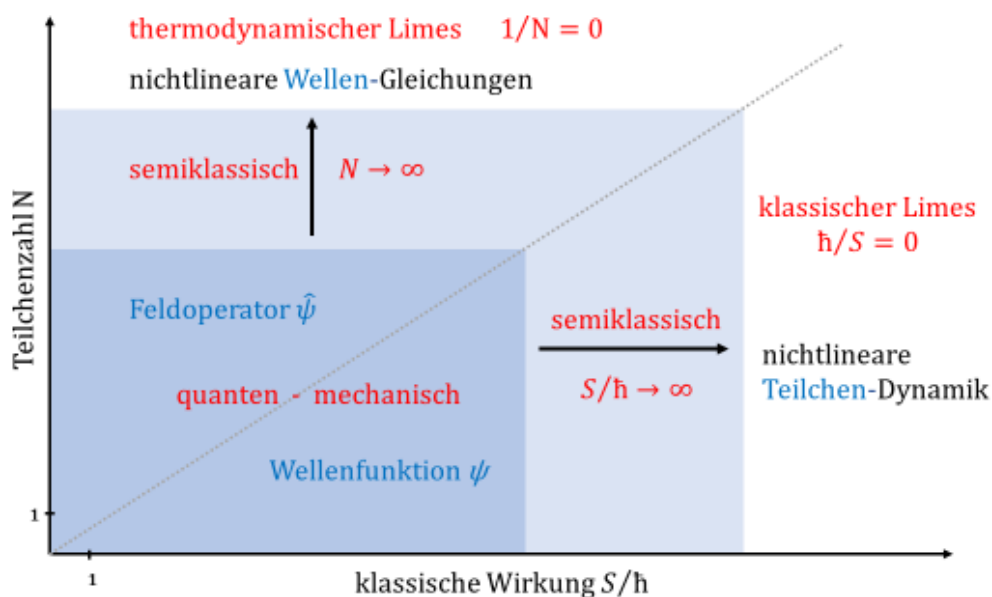


Abb 4: Semiklassische Limites in Vielteilchensystemen | Das gewöhnliche semiklassische Regime („ $\hbar \rightarrow 0$ “) beschreibt bei fester Teilchenzahl N den (horizontalen) Übergang von Wellen(funktionen) hin zu klassischen Teilchen. Der thermodynamische (vertikale) Limes wachsender Teilchenzahl entspricht formal einem weiteren, dazu „orthogonalen“ semiklassischen Limes mit effektivem „ $\hbar_{eff} = 1/N \rightarrow 0$ “, bei dem Quantenfelder in Wellen(funktionen) übergehen.

Wie unsere Forschung der letzten Jahre ergab, lassen sich nun der Vielteilchen-Propagator $U=e^{-iHt}$ und daraus abgeleitet Quanteneffekte in Systemen mit vielen, aber nicht unendlich vielen Teilchen, $\hbar_{eff} = 1/N \ll 1$, erneut effizient durch eine semiklassische Summe wie in Gl. (1) beschreiben, allerdings mit modifizierter Bedeutung: Statt über interferierende Amplituden verschiedener Trajektorien eines Teilchens im Ortsraum wird nun über abstrakte gemeinsame Pfade von vielen Teilchen summiert.

Diesen Unterschied zwischen Ein- und Vielteilchen-Interferenz veranschaulicht die Abb. 5 Das Interferenzbild *eines* Teilchens am Dreifachspalt (links) auf dem Schirm am Punkt x' entsteht durch Überlagerung der Amplituden von drei zu U in Gl. (1) beitragenden Pfaden von x nach x' im Ortsraum. Statt durch x lässt sich der gemeinsame Zustand von vier identischen Teilchen in einem periodischen Potential (z.B. vier Atome im Laserfeld, Abb. 5 rechts) quantenmechanisch durch die Zahl der Teilchen an jedem Gitterplatz beschreiben, allgemein durch den Satz der Besetzungszahlen, z.B. $|130\rangle$ für den Ausgangszustand in Abb. 5. Der exemplarische Vierteilchen-Endzustand $|121\rangle$ in diesem Raum der Besetzungszahlen, auch Fock-Raum genannt, entspricht einem Punkt x' im Ortsraum auf dem Schirm links unten. Die drei Abbildungen rechts zeigen drei exemplarische, interferierende Vierteilchen-Pfade im Fock-Raum von $|130\rangle$ nach $|121\rangle$. Für sehr viele

Teilchen kommt es zu Interferenz zwischen im Prinzip unendlich vielen Pfaden im hochdimensionalen Vielteilchen-Raum.

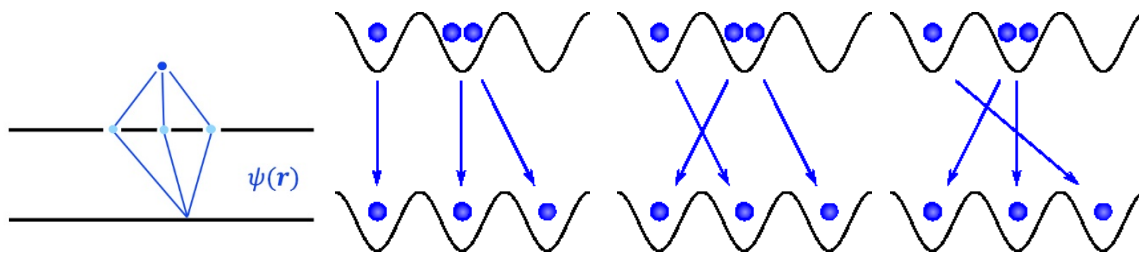


Abb 5: Einteilchen- versus Mehrteilchen-Interferenz | Das Interferenzbild auf dem Schirm hinter einem Dreifachspalt (links) entsteht durch Überlagerung der Amplituden von drei Pfaden im Ortsraum von x nach x' . Im Vierteilchensystem (rechts) entwickelt sich aus dem Ausgangszustand $|130\rangle$ (oben) der Endzustand $|211\rangle$ (unten) durch Überlagerung der Amplituden von verschiedenen gemeinsamen Pfaden im Raum der Besetzungszahlen, von denen korrespondierend zur linken Abb. drei exemplarische Pfade gezeigt sind.

So wie im Einteilchenfall die Pfade in der semiklassischen Summe (1) Bahnen klassischer Teilchen darstellen, so sind die abstrakten „klassischen“ Pfade im Fock-Raum nicht an ganzzahlige „quantisierte“ Besetzungszahlen gebunden. Diese Pfade sind nun – formal gesehen – verschiedene zeitabhängige Lösungen (kollektive Moden) der nichtlinearen Wellengleichungen im „klassischen Limes“ $N = \infty$ (in Abb. 4 oben). Die durch Wechselwirkungseffekte bedingten Nichtlinearitäten können nun dazu führen, dass diese Moden instabil oder sogar chaotisch sind. Diese „klassischen“ Moden implizieren Vielteilchen-Quantenchaos auf der Ebene der Quantenfelder, so wie chaotische klassische Einteilchen-Bahnen Fingerabdrücke in Wellenfunktionen auf der Ebene der Schrödingergleichung hinterlassen (Einteilchen-Quantenchaos). Dadurch wird gewissermaßen die Gutzwillersche semiklassische Theorie [2] des Zeitentwicklungsoperators U in Gl. (1) vom Niveau der „1. Quantisierung“ auf das der „2. Quantisierung“ gehoben, wie in Abb. 4 illustriert². Ich werde das zunächst an einem Beispiel veranschaulichen.

Quantenecho und OTOCs für kalte Atome

In einer Fallstudie [9] für ein Gas wechselwirkender bosonischer Atome in einem periodischen Potential (ähnlich wie in Abb. 5), welches sich experimentell kontrollieren [10] und adäquat durch ein Bose-Hubbard-Modell beschreiben lässt, konnte die oben skizzierte semiklassische Vielteilchen-Theorie überprüft werden. Dazu wurde ein dem Spin-Echo verwandtes Quanten-Echo berechnet: die Rückkehrwahrscheinlichkeit eines zeitlich propagierten N -Teilchenzustands, $e^{-iHt} |\psi\rangle$ in den Ausgangszustand $|\psi\rangle$, gegeben durch

² Das gleiche gilt für die Zustandsdichte, die sich im Limes „ $\hbar \rightarrow 0$ “ als Summe über Beiträge klassischer periodischer Bahnen [1,2], respektive im Limes „ $\hbar_{eff} = 1/N \rightarrow 0$ “, als Summe über zeitperiodische kollektive Moden darstellen lässt; siehe auch [11] für einen verwandten semiklassischen Zugang.

den Auto-Korrelator $|\mathcal{A}(t)| = |\langle \psi | e^{-iHt} | \psi \rangle|$. Die Abb. 6 zeigt vergleichend das semiklassische Resultat (rote Kurve) und das numerische quantenmechanische Ergebnis (an der horizontalen Zeitachse gespiegelte blaue Kurve). Die quasi-erratischen Quantenoszillationen im Rückkehrsignal $|\mathcal{A}(t)|$ stimmen fast quantitativ überein! Dass sich diese auf Vielteilchen-Interferenz zurückführen lassen, erkennt man unter anderem daran, dass die weitere, gestrichelte glatte schwarze Kurve, die die Propagation des Zustands entlang eines einzigen Pfades, also einer Mode im Vielteilchen-Raum repräsentiert, nur für kurze Zeiten die Dynamik adäquat beschreibt; für längere Zeiten wird der Vielteilchenzustand durch Interferenz mit anderen Pfaden dominiert, so wie von der semiklassischen Vielteilchen-Theorie in Verallgemeinerung der Gl. (1) vorhergesagt.

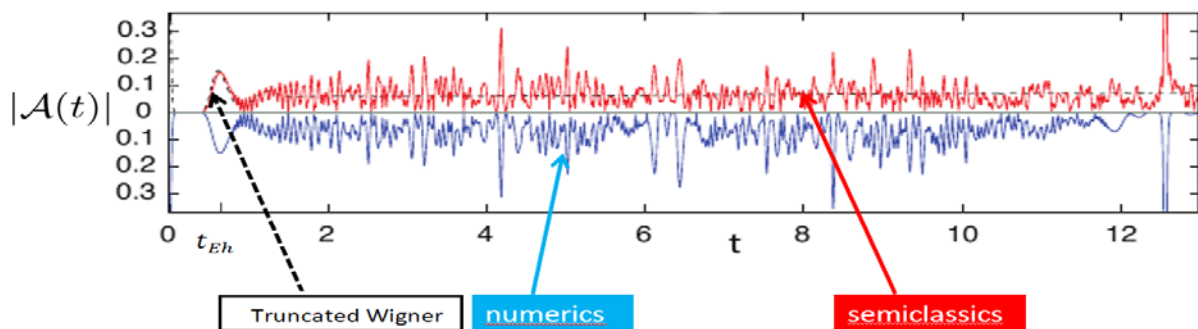


Abb. 6: „Scrambling“ und chaos-dominierte Vielteilchen-Quanteninterferenz in einem Atom-Ensemble fern vom Gleichgewicht | Zeitentwicklung (in Einheiten der Ehrenfestzeit t_E , s. Text) der Quanten-Rückkehrwahrscheinlichkeit eines anfänglich extremen Nichtgleichgewichtszustands $|0\ 20\ 0\ 20\rangle$ in einem Bose-Hubbard System mit $N=40$ Atomen auf 4 Plätzen. Das Resultat der Vielteilchen-Semiklassik (rote Kurve), basierend auf Interferenz von verschränkten Pfaden im Vielteilchen-Raum, und spiegelt das quantenmechanische Ergebnis (blau) wider; zum Vergleich: die klassische sogenannte „Truncated Wigner“-Näherung (schwarze gestrichelte Kurve), die nur einen Pfad und damit keine Vielteilcheninterferenz berücksichtigt (aus [9]).

Dieser Zusammenbruch der klassischen Näherung eines Pfades und der Übergang in ein durch N -Teilchen-Interferenz geprägtes Zeitregime vollzieht sich erneut auf der Zeitskala der Ehrenfest-Zeit t_E , die im Viel-Teilchenkontext heutzutage häufig als „scrambling time“ bezeichnet wird [8] und von der Teilchenzahl abhängt: $t_E = (1/\lambda) \ln(1/\hbar_{eff}) = (1/\lambda) \ln N$. Sie trennt kurze Zeiten quasiklassischer Bewegung, während der das System adäquat durch eine einzige dominante Mode beschrieben wird (gestrichelte Kurve in Abb. 6), von sich daran anschließender Vielteilchen-Interferenz und „scrambling“ der Quanteninformation. λ beschreibt – analog zu dem eingangs erwähnten klassischen Lyapunov-Exponenten – die Instabilität von kollektiven Moden im Vielteilchen-Raum. Die Lyapunov-Zeit $1/\lambda$, die in einem Teilchengas oder für Ladungsträger im Festkörper grob mit der typischen Streuzeit zwischen Teilchenstößen assoziiert werden kann, stellt die kürzeste relevante Zeitskala dar. Die Ehrenfestzeit ist auf Grund der logarithmischen Abhängigkeit $\sim \ln N$ im thermodynamischen Limes zwar signifikant größer, aber dennoch äußerst kurz im Vergleich zu weiteren charakteristischen Skalen. Mit anderen Worten, „scrambling“ der Quanteninformation

erfolgt auf enorm kurzen Skalen dadurch, dass der anfängliche Zustand relaxiert (thermalisiert) und exponentiell viele quantenmechanische Freiheitsgrade koppelt. Die zeitabhängigen Lösungen der nichtlinearen Wellengleichungen, also die klassischen Pfade/Moden im Vielteilchen-Raum, stellen desweiteren gerade die *Mean-field*-Lösungen des vollen Vielteilchen-Problems dar, was eine interessante neue Sicht auf den Zusammenhang zwischen Verschränkung, *scrambling* und quantenchaotischen Vielteilchenphänomenen eröffnet: Ein einzelner *Mean-field*-Zustand, also eine einzelne Mode, ist nicht verschränkt. Jenseits von t_E impliziert die Kopplung und kohärente Überlagerung von vielen *Mean-field*-Moden gemäß Gl. (1) massive Vielteilchen-Interferenz zwischen diesen und generiert damit hohe Verschränkung im Vielteilchen-Propagator: Quantenchaos und hohe Verschränkung sind aufs engste miteinander verwoben.

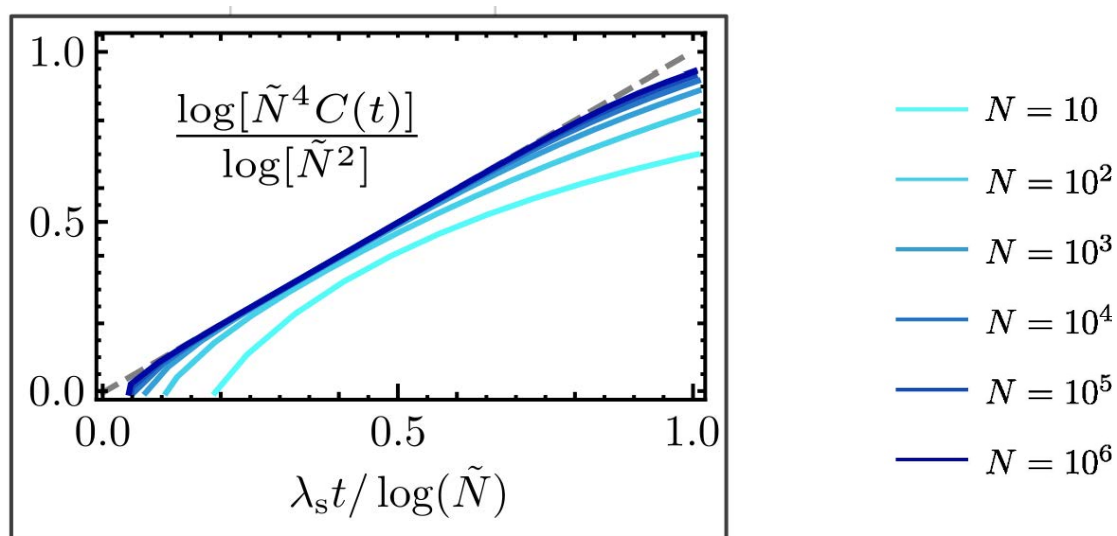


Abb. 7: Quantenschmetterlingseffekt, sichtbar gemacht durch den OTOC für ein Gas aus stark wechselwirkenden Bosonen | Die numerisch berechneten OTOCs $C(t) = \langle \psi | [n(t), n(0)]^2 | \psi \rangle$ (wobei $n(t)$ Besetzungszahloperatoren sind) nähern sich mit wachsender Teilchenzahl der in logarithmischer Darstellung als gestrichelte Gerade erscheinenden Exponentialfunktion $C(t) \sim e^{2\lambda t}$ an, wobei der Exponent λ aus der korrespondierenden klassischen Dynamik berechnet wurde (aus [13]).

Mit diesen Überlegungen können wir nun das Verhalten der eingangs eingeführten OTOCs im N -Teilchenfall analysieren und deuten. Eine entsprechende semiklassische Vielteilchentheorie für OTOCs $C(t)$ sagt für Zeiten $t < t_E$ exponentielles Wachstum voraus [12]: $C(t) \sim e^{2\lambda t}$, nun aber mit dem gerade erwähnten Lyapunov-Exponenten λ der N -Teilchen-Dynamik! Die Abb. 7 zeigt korrespondierende numerische Rechnungen [13] für ein eindimensionales Modellsystem eines Gases aus N wechselwirkenden Atomen an einem quantenkritischen Punkt, der durch N -Teilchen-Dynamik mit Instabilität λ gekennzeichnet ist³. Die Wahl dieses Systems erlaubt die Berechnung von OTOCs für sehr große

³ Die zeitliche Dynamik verwandter quasi-eindimensionaler Gase kalter Atome, die z.B. in der Gruppe von M. Oberthaler in Heidelberg experimentell untersucht werden, trägt universelle und selbstähnliche Züge [14].

Teilchenzahlen. In der Tat nähern sich die OTOC-Kurven mit wachsendem N im Limes $\hbar_{eff} = 1/N \rightarrow 0$ der asymptotischen Vorhersage $C(t) \sim e^{2\lambda t}$ an! Wenn man so will, ein Quanten-Schmetterlingseffekt. Für Zeiten $t > t_E$ geht das exponentielle Wachstum dann in ein Plateau über, was durch Vielteilchen-Quanteninterferenz generiert und gekennzeichnet ist [12].

In ersten Experimenten zu kalten Atomen ist inzwischen die Vermessung von OTOCs gelungen [15,16], trotz der komplizierten Realisierung der ihnen zu Grunde liegenden Vorwärts- und Rückwärtspropagation, da in OTOCs („out-of-time-order“) ja die Zeitentwicklung gezielt durcheinander gebracht wird.

Die Quantenphysik von klassischem Chaos

Unterschiedliche Facetten der oben erwähnten Mechanismen, die Vielteilchen-Chaos, *scrambling* und Verschränkung verknüpfen, und mit ihnen verwandte Phänomene entpuppen sich als relevant in verschiedensten aktuellen Forschungsfeldern. Dadurch hat sich das dynamisch formierende Feld des Vielteilchen-Quantenchaos zum zentralen Bindeglied bisher disjunkt erscheinender Gebiete der Physik entwickelt, wie in der Abb. 1 schematisch illustriert. Hier greife ich exemplarisch eine derartige Brücke zwischen Disziplinen heraus:

In den letzten Jahren haben sich erstaunliche Parallelen aufgetan zwischen Quantenchaos-Aspekten in den oben genannten Vielteilchen-Quantensystemen und theoretischen Zugängen zur Quantengravitation in der Kosmologie, die auch derartige Quanten-Schmetterlingseffekte prognostizieren. In dem Kontext wurde vorhergesagt, dass für komplexe Systeme im thermischen Gleichgewicht eine OTOC-Variante exponentiell mit der Zeit wächst, wobei der Exponent, ein Quantenanalogen λ_Q des klassischen Lyapunov-Exponents λ , einer universellen temperaturabhängigen oberen Schranke unterliegt: $\lambda_Q < 2\pi k_B T / \hbar$. Wenn man das exponentielle Wachstum von OTOCs mit Quantenchaos assoziiert, so impliziert diese Ungleichung, dass die Ausprägung von Chaos rein quantenmechanisch beschränkt ist („a bound to chaos“ [8]) und bei niedrigen Temperaturen sogar unterdrückt wird! Quantensysteme, die diese obere Schranke erreichen, also die absolut schnellsten „Scrambler“, sind u.a. ein stark wechselwirkendes Modellsystem in der Festkörpertheorie, das sogenannte Sachdev-Ye-Kitaev (SYK)-Modell (was numerisch gerade bestätigt wurde [17]) sowie holographische Modelle von schwarzen Löchern. Diese Modelle sind charakterisiert durch eine Dualität zwischen einem gravitativen System und einer konformen Quantenfeldtheorie. L. Susskind postuliert mit Hilfe dieser sogenannten AdS-CFT-Dualität sogar einen direkten Zusammenhang zwischen der obigen Chaos-Schranke und Einsteins Beschränkung von Geschwindigkeiten durch die Lichtgeschwindigkeit c [18]. Da obige Modelle auch bei der Suche nach einer adäquaten Theorie der Quantengravitation eine Rolle spielen, werden hier plötzlich semiklassische Konzepte des Quantenchaos [2,3,19] relevant. Während vieles dafür spricht, dass die Chaos-Schranke zumindest für gewisse quantenkritische Systeme gilt, ist der Grad ihrer Allgemeinheit noch völlig unklar und Gegenstand aktueller Forschung.

Zusammenfassend lässt sich konstatieren: Chaos bedingt massive quantenmechanische Verschränkung in Vielteilchen-Systemen. Während der numerische Aufwand üblicher quantenmechanischer Methoden mit wachsender Teilchenzahl enorm wächst, bildet umgekehrt der Limes großer Teilchenzahl gerade die Basis und definiert Anwendungsfelder moderner semiklassischer Pfadintegral-Methoden. Diese liefern Einblick in die zu Grunde liegenden komplexen Vielteilchen-Mechanismen – der Quantenmechanik von klassischem Chaos – im Korrespondenzregime zwischen klassischer und Quantenwelt. Der ultimative Übergang von der Vielteilchen-Quantenphysik ($N \gg 1$) mit massiver Verschränkung zur klassischen makroskopischen Physik ($N = \infty$) erfolgt jedoch abrupt; ihm unterliegt mathematisch eine singuläre semiklassische Asymptotik. Derartige Brüche zwischen Theoriegebäuden lassen darauf schließen, dass hier noch viele interessante physikalische Phänomene auf uns warten.

Literatur

- [1] A. Einstein, Verh. Deutsch. Phys. Ges. Berlin, **19**, 82 (1917)
- [2] M. C. Gutzwiller, J. Math. Phys. **12**, 343 (1971) und Referenzen darin.
- [3] F. Haake, K. Richter, Phys. Journal **10**, Nr. 4, 35 (2011)
- [4] F. Haake, S. Gnutzmann, M. Kus, *Quantum Signatures of Chaos* (Springer, 2019)
- [5] X. Mi et al., Science 10.1126/science.abg5029 (2021)
- [6] B. Swingle, Nature Physics **14**, 988 (2018)
- [7] A. Larkin, Y. N. Ovchinnikov, Sov. Phys. JETP **28**, 1200 (1969)
- [8] J. Maldacena, S.H. Shenker, D. Stanford, JHEP08 **2016**, 106 (2016)
- [9] S. Tomsovic, P. Schlagheck, J. Ullmo, J.D. Urbina, K. Richter, Phys. Rev. A **97**, 061606 (RC) (2018)
- [10] M. Greiner, I. Bloch, Phys. Journal **14**, Nr. 10, 33 (2015)
- [11] M. Akila, D. Waltner, B. Gutkin, P. Braun, T. Guhr, Phys. Rev. Lett. **118**, 164101 (2017)
- [12] J. Rammensee, J. D. Urbina, K. Richter, Phys. Rev. Lett. **121**, 124101 (2018)
- [13] Q. Hummel, B. Geiger, J.D. Urbina, K. Richter, Phys. Rev. Lett. **123**, 160401 (2019)
- [14] M. Prüfer, H. Strobel, M. Oberthaler, Phys. Journal **20**, Nr. 2, 36 (2021)
- [15] M. Gärttner *et al.*, Nature Physics **13**, 781 (2017)
- [16] M. K. Joshi *et al.*, Phys. Rev. Lett. **124**, 240505 (2020)
- [17] B. Kobrin *et al.*, Phys. Rev. Lett. **126**, 030602 (2021)
- [18] L. Susskind, arXiv:1802.01198 (2018)
- [19] A. Altland, J. Sonner, SciPost Phys. **11**, 034 (2021)

Der Autor:

Klaus Richter (FV Dynamik und Statistische Physik und FV Tiefe Temperaturen) studierte in Kiel und Freiburg Physik und promovierte dort bei D. Wintgen und J. Briggs in Theoretischer Atomphysik. Anschließend befasste er sich mit Mesoskopischer Physik und Quantenchaos in Orsay, in Augsburg, wo er sich habilitierte, und in Dresden als Leiter einer Nachwuchsgruppe am *MPI für Physik komplexer Systeme*. Seit 2001 hat er an der Universität Regensburg einen Lehrstuhl im Bereich der Theorie der Kondensierten Materie inne. Für seine Arbeiten wurde er 2019 mit dem Physikpreis Dresden ausgezeichnet. Er war von 2012 bis 2015 Sprecher der Sektion Kondensierte Materie der DPG, von 2017 bis 2021 im DPG-Vorstand zuständig für Wissenschaftliche Programme und Preise, und er ist Sprecher des DFG-Sonderforschungsbereichs *Emergent Relativistic Effects in Condensed Matter*.



Foto: @ DPG / Heupel

Prof. Dr. Klaus Richter, Institut für Theoretische Physik, Universität Regensburg, 93040 Regensburg.