Lokale Kohomologie

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
der Fakultät für Mathematik
der Universität Regensburg

vorgelegt von
Michael Hellus
aus
Abensberg

1999

Promotionsgesuch eingereicht am:

Die Arbeit wurde angeleitet von Dr. Reinhold Hübl.

Prüfungsausschuß:

Inhalt

0. Einleitung

Eines der ersten wichtigen Ergebnisse der algebraischen Geometrie war ein Satz von Riemann, der die Dimension des Vektorraums aller Funktionen auf einer Kurve C vom Geschlecht g, die auf einer Menge D von n Punkten höchstens einfache Polstellen haben, durch $n+1-g$ nach unten abschätzt:

$$dim\ \Gamma(C, O_C(D)) \geq n+1-g$$

In der Folge konnte Roch den Fehlerterm dieser Ungleichung bestimmen (mit Hilfe des kanonischen Divisors). Die entstehende Gleichheit läßt sich kohomologisch ausdrücken:

$$dim\ H^0(C, O_C(D)) - dim\ H^1(C, O_C(D)) = n+1-g \quad .$$

Für einen Divisor D auf einer Fläche X gibt es eine Identität, die den Ausdruck

$$\sum_{n=0}^{2} (-1)^n dim\ H^n(X, O_X(D))$$

berechnet.

Diese Beispiele zeigen einerseits die Bedeutung der Kohomologietheorie und andererseits die Notwendigkeit, die tendeziell komplizierteren höheren Kohomologiegruppen durch die tendeziell einfacheren niedrigeren Kohomologiegruppen auszudrücken. Hierzu gibt es folgenden Dualitätssatz: Ist $\mathfrak{F}$ eine invertierbare Garbe auf einem d-dimensionalen projektiven Raum X, so gilt

$$H^i(X, \mathfrak{F}) = H^{d-i}(X, \mathfrak{F}^{-1} \otimes \omega_X)^*$$

Hier bezeichnet $*$ das Dual in den Grundkörper und ω_X die kanonische Garbe. Es gibt auch eine lokale Version des Dualitätssatzes: Ist $(R, \mathfrak{m})$ ein d-dimensionaler regulärer Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul, so gilt

$$H^i_{\mathfrak{m}}(M) = Ext^{d-i}(M, R)^*$$

Hier bezeichnet $*$ den Dualitäts-Funktor $Hom_R(\_, E_R(R/\mathfrak{m}))$, wobei $E_R(R/\mathfrak{m})$ eine R-injektive Hülle von $R/\mathfrak{m}$ ist. An dieser Stelle kommt zum ersten Male die lokale Kohomologie ins Spiel. Im folgenden geht es um die mehr algebraischen Aspekte lokaler Kohomologiemoduln mit Träger in einem Ideal bzw. einer abgeschlossenen Untervarietät.

Kurz zur Geschichte: Die lokale Kohomologie wurde im Jahre 1961 von Grothendieck eingeführt (siehe [Gr]), und zwar als Rechtsableitung des Funktors $\Gamma_Y(X, \_\ )$ (auf einem

Schema X mit abgeschlossenem Unterschema $Y \subseteq X$), der einer Garbe auf X die Menge ihrer globalen Schnitte mit Träger enthalten in Y zuordnet. Dabei wird die l-te Rechtsableitung dieses Funktors als $H^l_Y(\_)$ geschrieben und als l-te lokale Kohomologie mit Träger in Y bezeichnet. Für $Y = X$ erhält man also die übliche globale Kohomologie. Anstelle dieser eher geometrischen Definition wird in dieser Arbeit eine algebraische verwendet: Die lokale Kohomologie mit Träger in I ist die Rechtsableitung des Funktors $\Gamma_I(\_)$ (I Ideal eines noetherschen Rings R) von der Kategorie der R-Moduln in sich, der einem R-Modul M den größten R-Untermodul $N \subseteq M$ mit $Supp_R(N) \subseteq \mathcal{V}(I)$ zuordnet. Die l-te Rechtsableitung dieses Funktors wird $H^l_I(\_)$ geschrieben und als l-te lokale Kohomologie mit Träger in I bezeichnet. Für das abgeschlossene Unterschema $\mathcal{V}(I) \subseteq Spec(R)$ stimmen beide Definitionen überein, die lokale Kohomologie hängt also nur vom Radikal des Trägerideals ab.

Man kann die lokale Kohomologie auch als die Kohomologie des Čech-Komplexes zu einer affinen Überdeckung von $Spec(R) \backslash \mathcal{V}(I)$ einführen (siehe Satz 1.3). Letztere Möglichkeit mag zwar motivierter erscheinen als die erstere, jedoch werden die funktoriellen Zusammenhänge bei ihr weniger deutlich.

Die Bedeutung der lokalen Kohomologie liegt insbesondere darin, daß sie einerseits Methoden der lokalen Algebra zugänglich ist und andererseits Informationen über quasiprojektive Varietäten bzw. Schemata enthält (siehe Satz 1.5). Gerade durch diese Verbindung lassen sich Sätze der projektiven Geometrie beweisen, in deren Voraussetzungen lokale Kohomologie übehaupt nicht vorkommt. Hierzu zwei Beispiele:

1.) Sind $X, Y \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ (irreduzible) Varietäten im projektiven Raum über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k und gilt $dim(X) + dim(Y) > n$, so ist $X \cap Y$ zusammenhängend (siehe [BS], Corollary 19.6.7).

2.) Im projektiven Raum sind mengentheoretisch vollständige Durchschnitte positiver Dimension zusammenhängend in Kodimension eins (siehe [Rung], Korollar 2.8).

In diesem Zusammenhang sei auch erwähnt, daß die lokale Kohomologie graduierter Ringe von einiger Bedeutung ist (siehe [BS], §§12-17).

Es dürfte somit klar sein, daß die Struktur der lokalen Kohomologiemoduln von Interesse für die algebraische Geometrie ist. Die wichtigsten Fragen zu ihrer Struktur lauten:
a) Wann ist ein gegebener lokaler Kohomologiemodul Null?
b) Genügt ein gegebener lokaler Kohomologiemodul irgendwelchen Endlichkeitsbedingungen?

Bei der Untersuchung dieser Fragen kann man sich häufig auf den Fall eines lokalen (stets noetherschen) Rings R beschränken: Dies liegt daran, daß die lokale Kohomologie mit flachem Basiswechsel, also insbesondere mit Lokalisation, "vertauscht" (siehe Bemerkung 1.6 i)).

Eine wichtige Antwort auf Frage a) wurde von Grothendieck geliefert: Für $l > dim(R)$ ist $H_I^l(M)$ (bezeichnet die l-te lokale Kohomologie des R-Moduls M mit Träger im Ideal I) stets Null (siehe [Gr]). Ein zweites zentrales Resultat über das Nullsein ("verschwinden") lokaler Kohomologie ist der Satz von Hartshorne-Lichtenbaum: Ist R noethersch, lokal, komplett und integer, so ist $H_I^{dim(R)}(R)$ genau dann nicht Null, wenn I primär zum maximalen Ideal ist (siehe etwa [BS], 8.2.10). Der nächste Meilenstein in der Untersuchung von Frage a) ist ein Ergebnis von Faltings (siehe [Fa], Korollar 2):

Satz:

Ist R ein kompletter lokaler äquicharakteristischer Ring von der Form $R = S/I$ mit einem regulären lokalen Ring S, $J \subseteq R$ ein Ideal mit Urbild J' in S, so ist $H_J^l(M) = 0$ für $l > dim(R) - [(dim(R) - 1)/b]$ und für jeden R-Modul M. Hierbei ist b das Maximum der Höhen der minimalen Primoberideale von J' und [...] bezeichnet die Gauß-Klammer.

Dieses Resultat ist in gewisser Weise nicht verbesserbar (siehe hierzu [Fa]). Kapitel 3 der vorliegenden Arbeit hängt eng mit dem Satz von Faltings zusammen, insbesondere im gemischtcharakteristischen Fall: So sind Korollar 3.8 und Satz 3.11 zwei Versionen des Satzes von Faltings in gemischter Charakteristik; Korollar 3.8 behandelt den Fall, daß p (die Charakteristik des Restklassenkörpers von R) in keinem minimalen Primoberideal von I enthalten ist, Satz 3.11 hingegegen den Fall, daß p in jedem minimalen Primoberideal von I enthalten ist. Somit konnte das (nicht verbesserbare) Resultat von Faltings in zwei Fällen in gemischter Charakteristik etabliert werden. In diesen beiden Fällen wird auch gezeigt, daß die gewonnene Abschätzung nicht verbessert werden kann.

Zu Frage b): Die lokalen Kohomologiemoduln sind im allgemeinen nicht endlich erzeugt: Ist R beispielsweise ein regulärer lokaler Ring, der einen Körper enthält, so ist für $l \geq 1$ der lokale Kohomologiemodul $H_I^l(R)$ nur dann endlich erzeugt, wenn er der Nullmodul ist. In dieser Situation gilt nämlich folgender

Satz (Corollary 1.5 in [Ly2] in Charakteristik p, Theorem 3.4(b) in [Ly] in Charakteristik 0):

$$injdim(H_I^l(R)) \leq dim(Supp_R(H_I^l(R)))$$

für jedes Ideal I und jedes $l \in \mathbf{N}$.

Wäre nun $0 \neq H_I^l(R)$ endlich erzeugt als R-Modul, so hätten wir gemäß [Ma], Theorem 18.9

$$dim(R) = depth(R) = injdim(H_I^l(R)) \leq dim(Supp_R(H_I^l(R))) \leq dim(R)$$

und also $Supp_R(H_I^l(R)) = Spec(R)$, woraus sich ein Widerspruch zu $l \geq 1$ ergibt.

Grothendieck vermutete im Jahre 1968 in [Gr2] die schwächere Aussage, daß wenigstens $Hom_R(R/I, H_I^l(R))$ stets endlich erzeugt sei. Jedoch konnte Hartshorne im Jahre 1970 in [Ha] ein Gegenbeispiel hierfür angeben: Dieses Gegenbeispiel sieht folgendermaßen aus:
k ein Körper, $R = k[X,Y,Z,W]/(XY - ZW) = k[x,y,z,w]$, $I = (x,z) \subseteq R$. Dann ist $Hom_R(R/I, H_I^2(R))$ nicht endlich erzeugt.

R ist nicht regulär: Somit stellt sich die Frage, ob Grothendiecks Vermutung vielleicht im regulären lokalen Fall richtig ist. Es gilt jedoch folgender

Satz (Theorem 2.3(ii) in [HK] in Charakteristik p, Corollary 3.5 in [Ly] in Äquicharakteristik 0):

Ist R ein regulärer lokaler äquicharakteristischer Ring, b das Maximum der Höhen der minimalen Primoberideale von I und $l > b$, so ist $Hom_R(R/I, H_I^l(R))$ nur dann endlich erzeugt, wenn $H_I^l(R) = 0$ ist.

Ist nun k ein Körper der Charakteristik Null, R der Potenzreihenring über k in den sechs Variablen $X_1, \ldots, X_6$, I_Δ das von den 2×2-Minoren der generischen 2×3-Matrix (mit Einträgen $X_1, \ldots, X_6$) in R erzeugte Ideal, so hat I_Δ bekanntlich die reine Höhe 2 (d.h., daß alle seine minimalen Primoberideale die Höhe 2 haben). Hochster konnte jedoch zeigen (siehe z. B. [HK], Example 2.4), daß $H^3_{I_\Delta}(R) \neq 0$ gilt. Somit ist $Hom_R(R/I_\Delta, H^3_{I_\Delta}(R))$ nicht endlich erzeugt, Grothendiecks Vermutung also auch im regulären Fall falsch.

Wäre nun $Hom_R(R/I_\Delta, H^3_{I_\Delta}(R))$ endlich erzeugt als R-Modul, so wäre natürlich $Ass_R(H^3_{I_\Delta}(R))$ "automatisch" endlich. Satz 2.15 der vorliegenden Arbeit zeigt, daß $Ass_R(H^3_{I_\Delta}(R))$ endlich ist, obwohl $Hom_R(R/I_\Delta, H^3_{I_\Delta}(R))$ nicht endlich erzeugt ist. Es stellt sich also die Frage, ob lokale Kohomologiemoduln immer nur endlich viele assoziierte Primideale haben. Hierzu machte Huneke in [Hu] folgende Vermutung: Ist R ein noetherscher lokaler Ring, so ist $Ass_R(H_I^l(R))$ für jedes I und l endlich. In voller Allgemeinheit ist über diese Vermutung nichts bekannt.
Die vorliegende Arbeit behandelt in Kapitel 2 folgende Abschwächung:

Vermutung (*):

Ist R ein lokaler Cohen-Macaulay-Ring, so ist $Ass_R(H_I^l(R))$ für jedes I und jedes l endlich.

Vermutung (*) konnte in verschiedenen Spezialfällen bewiesen werden (siehe die Sätze 2.1, 2.3, 2.11, 2.15, 2.16 und die Korollare 2.6 und 2.7). Der Hauptsatz in Kapitel 2 ist jedoch

2.12 Satz:

Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Cohen-Macaulay-Ring. Genau dann ist für jedes $j \in \mathbb{N}$ und jedes Ideal $I \subseteq R$ die Menge $Ass_R(H_I^j(R))$ endlich, wenn folgende beiden Bedingungen erfüllt sind:
a) Sind $x, y \in R$, so ist $Ass_R(H^2_{(x,y)}(R))$ endlich.
b) Sind $y \in R$ und ist $x_1, x_2 \in R$ eine reguläre Folge, so ist $Ass_R(H^3_{(x_1,x_2,y)}(R))$ endlich.

Die anschließende Bemerkung 2.13 zeigt außerdem, daß im regulären Fall Bedingung a) immer erfüllt ist.

Die Vermutung von Huneke konnte bisher in zwei Spezialfällen positiv beantwortet werden; es gilt nämlich folgender

Satz (Lyubeznik in [Ly] in Charakteristik 0, Huneke/Sharp in [HS] in Charakteristik p):

Ist R ein regulärer Ring, der einen Körper enthält, so ist $Ass_R(H_I^l(R))$ endlich für jedes l und jedes I.

Im nicht lokalen Fall ist Vermutung (*) falsch: Dies zeigt ein von A. Singh gefundenes Gegenbeispiel (vgl. Satz 2.17). Im Hinblick auf Frage b) wurden übrigens auch andere Endlichkeitsbedingungen untersucht. So konnten Lyubeznik in Charakteristik 0 (vgl. [Ly]) und Huneke/Sharp in Charakteristik p (vgl. [HS]) zeigen, daß sämtliche Bass-Zahlen von $H_I^l(R)$ endlich sind, falls R ein regulärer Ring ist, der einen Körper enthält.

Die vorliegende Arbeit ist folgendermaßen aufgebaut: Kapitel 1 dient der Einführung der lokalen Kohomologie und bringt anschließend zahlreiche wichtige Eigenschaften und Sätze über lokale Kohomologiemoduln. Beweise werden nur vorgestellt, wenn sie kurz sind oder kein geeignetes Zitat zur Verfügung stand. Die wichtigsten Punkte sind: Mayer-Vietoris-Sequenz (Satz 1.14), Satz über die Spektralsequenz für zusammengesetzte Funktoren (Satz 1.15), Satz von Hartshorne-Lichtenbaum (Satz 1.16). Die Mayer-Vietoris-Sequenz spielt eine zentrale Rolle in Kapitel 2.

Kapitel 2 behandelt die weiter oben angeführte Vermutung (*), daß im Cohen-Macaulay-Fall jedes $H_I^l(R)$ nur endlich viele assoziierte Primideale hat. Satz 2.1 zeigt, daß wenigstens $H_I^{depth(I,M)}(M)$ nur endlich viele assoziierte Primideale hat (wobei M sogar ein beliebiger endlich erzeugter R-Modul sein darf). Ein weiterer Spezialfall wird von Satz 2.3 erledigt: $H_I^1(M)$ hat nur endlich viele assoziierte Primideale (M endlich erzeugter R-Modul). Korollar 2.6 stellt ein Teilergebnis dar: Jedes $H_I^j(R)$ hat nur endlich viele assoziierte Primideale der Höhe j.

Mit den bis hier entwickelten Methoden zeigt Korollar 2.7 die Richtigkeit von Vermutung (*), falls $dim(R) \leq 3$. Ist R regulär, so läßt sich auch im Fall $dim(R) = 4$ Vermutung (*) positiv beantworten (Satz 2.11). Hauptsatz des ganzen Kapitels ist schließlich der oben erwähnte Satz 2.12 und seine ebenfalls oben erwähnte Verschärfung im regulären Fall, Bemerkung 2.13.

Die Sätze 2.15 und 2.16 behandeln schließlich einen für die Situation in Satz 2.12 ii) b) "typischen", d.h. "generischen" Fall und zwar in äqui- und in gemischter Charakteristik. Abschließend zeigt Satz 2.17, daß die Vermutung (*) falsch wird, wenn man die Voraussetzung lokal entfernt; dies ist ein Ergebnis von A. Singh, vgl. [Si].

Für das Verständnis von Kapitel 3 ist die Lektüre von [Fa] unerläßlich. Korollar 3.8 zeigt eine zu [Fa], Korollar 2 analoge Aussage im gemischtcharakteristischen Fall, falls p(=Charakteristik des Restklassenkörpers) in keinem minimalen Primoberideal des betrachteten Ideals I liegt. Für den anderen Extremfall, daß p in jedem minimalen Primoberideal von I enthalten ist, zeigt Satz 3.11 fast die gleiche Abschätzung. Mit den verwendeten Methoden ist wohl nicht zu klären, ob ähnliches auch für die zwischenliegenden Fälle (p in manchen minimalen Primoberidealen von I enthalten, in manchen nicht) gilt. Weiterhin werden in Kapitel 3 Beispiele angegeben, die zeigen, daß die eben erwähnten Abschätzungen nicht verbessert werden können, ohne zusätzliche Voraussetzungen zu verwenden. Es bleibt anzumerken, daß die hier erwähnten Sätze aus Kapitel 3 voraussetzen, daß der gegebene lokale gemischtcharakteristische Ring unverzweigt ist (d.h. $p \notin \mathfrak{m}^2$). Auch im verzweigten Fall werden Verschwindungssätze gezeigt (Satz 3.5 und Satz 3.7); diese sind allerdings wesentlich technischerer Natur als die eingangs erwähnten Aussagen (Korollar 3.8 und Satz 3.11) und erlauben keine direkte Abschätzung über die kohomologische Dimension.

Kapitel 4 ist sehr kurz. Craig Huneke fragt in [Hu], ob eine bestimmte Charakterisierung der endlich erzeugten lokalen Kohomologiemoduln zutrifft. In der vorliegenden Arbeit wird diese Frage anhand eines Beispiels negativ beantwortet.

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Dr. habil. Reinhold Hübl für die Anregung zu diesem Thema und besonders für die freundliche Unterstützung bedanken. Weiterhin bedanken möchte ich mich bei Herrn Anton Rechenauer für viele fruchtbare Diskussionen und Anregungen.

1. Einführung der lokalen Kohomologie

In diesem Kapitel wird zunächst (nach einem hierzu nötigen Exkurs über Rechtsableitungen) die lokale Kohomologie eingeführt und anschließend eine Methode zu ihrer Berechnung vorgestellt (siehe Satz 1.3). Diese Berechnungsmethode stellt einen zweiten Zugang zur lokalen Kohomologie dar, der zwar konkreter ist als der über Rechtsableitungen, jedoch auch die funktoriellen Zusammenhänge weniger deutlich zutage treten läßt.
Als nächstes zeigt Satz 1.5, daß die globale Kohomologie quasiprojektiver Varietäten als lokale Kohomologie dargestellt werden kann. Somit ist eine Verbindung zwischen lokaler Kohomologietheorie und algebraischer Geometrie gegeben. Der Rest von Kapitel 1 ist eine Ansammlung weitgehend bekannter Aussagen über lokale Kohomologiemoduln, die in den restlichen Kapiteln häufig verwendet werden.
Die lokale Kohomologie wird als Rechtsableitung eines gewissen Funktors (des sogenannten lokalen Schnittfunktors) eingeführt. Aus Gründen der Vollständigkeit und zur besseren Übersicht soll hier kurz das Wichtigste über Rechtsableitungen wiederholt werden.
Im folgenden sei R ein noetherscher Ring. Außerdem sei ein additiver linksexakter Funktor F von der Kategorie der R-Moduln in sich (genauso auch allgemeiner: Von einer abelschen Kategorie $\mathfrak{A}$ mit genügend vielen injektiven Objekten in eine abelsche Kategorie $\mathfrak{B}$) vorgegeben. Dann gibt es Funktoren $(R^iF)_{i\in\mathrm{N}}$ von der Kategorie der R-Moduln in sich (bzw. von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$) zusammen mit Homomorphismen $(R^iF)(C) \longrightarrow (R^{i+1}F)(A)$ für jede kurze exakte Sequenz $0 \to A \to B \to C \to 0$ von R-Moduln (bzw. in $\mathfrak{A}$) (für jedes $i \in \mathrm{N}$) mit folgenden Eigenschaften:
i) $R^0F = F$.
ii) Ist E ein injektiver R-Modul (bzw. ein injektives Objekt aus $\mathfrak{A}$), so ist $(R^iF)(E) = 0$ für jedes $i > 0$.
iii) Ist $0 \to A \to B \to C \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln (bzw. in $\mathfrak{A}$), so ist die induzierte Sequenz

$$\begin{aligned}(*)\quad 0 &\longrightarrow (R^0F)(A) \longrightarrow (R^0F)(B) \longrightarrow (R^0F)(C) \longrightarrow \\ &\longrightarrow (R^1F)(A) \longrightarrow (R^1F)(B) \longrightarrow (R^1F)(C) \longrightarrow \\ &\longrightarrow (R^2F)(A) \longrightarrow (R^2F)(B) \longrightarrow (R^2F)(C) \longrightarrow \dots\end{aligned}$$

exakt und (*) hängt funktoriell von der kurzen exakten Sequenz $0 \to A \to B \to C \to 0$ ab.
Weiterhin sind die $(R^iF)_{i\in\mathrm{N}}$ durch diese Eigenschaften bis auf kanonische Isomorphie eindeutig bestimmt. Die Funktoren $(R^iF)_{i\in\mathrm{N}}$ können auf folgende Weise berechnet werden:

Zu einem gegebenen R-Modul M (bzw. einem gegebenen Objekt M aus $\mathfrak{A}$) wähle eine injektive Auflösung

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \mathfrak{J}^\bullet$$

von M. Dann ist $(R^iF)(M) = H^i(F(\mathfrak{J}^\bullet))$. Beweise für die bisher getroffenen Aussagen finden sich zum Beispiel in [Wei], section 2.5.

Definition

Ist F ein linksexakter additiver Funktor von der Kategorie der R-Moduln in sich (bzw. von einer abelschen Kategorie $\mathfrak{A}$ mit genügend vielen injektiven Objekten in eine abelsche Kategorie $\mathfrak{B}$), so heißen die R^iF die Rechtsableitungen des Funktors F.

Wir kommen nun zu dem Funktor, dessen Rechtsableitung die lokale Kohomologie schließlich sein wird:

Definition

Ist I ein Ideal von einem noetherschen Ring R, so heißt der Funktor Γ_I, der einem R-Modul M den R-Modul

$$\Gamma_I(M) := \{m \in M | \text{ Es existiert ein } n \in \mathrm{N} \text{ mit } I^n m = 0\}$$

und einem Homomorphismus $M \xrightarrow{\varphi} N$ von R-Moduln den R-Modul-Homomorphismus $\varphi|_{\Gamma_I(M) \longrightarrow \Gamma_I(N)}$ zuordnet, lokaler Schnittfunktor mit Träger in I. Ist Y abgeschlossene Teilmenge eines topologischen Raumes X, so heißt der Funktor $\Gamma_Y(X,\_\,)$, der einer Garbe abelscher Gruppen $\mathfrak{F}$ auf X die Gruppe

$$\Gamma_Y(X, \mathfrak{F}) := \{s \in \mathfrak{F}(X) \mid s|X \setminus Y = 0\}$$

zuordnet, lokaler Schnittfunktor mit Träger in Y. Statt $\Gamma_X(X,\_\,)$ schreibt man einfach $\Gamma(X,\_\,)$ und spricht vom globalen Schnittfunktor. Der Funktor Γ_I kann übrigens als Spezialfall des Funktors $\Gamma_Y(X,\_\,)$ verstanden werden, da kanonisch $\Gamma_I = \Gamma_Y(Spec(R),\_\,)$ mit $Y :=\mathcal{V}(I)$ gilt, wenn man R-Moduln mit ihren assoziierten Garben auf $Spec(R)$ identifiziert.

Diese Schnittfunktoren sind linksexakt:

1.1 Lemma

Sei I ein Ideal von einem noetherschen Ring R. Der Funktor Γ_I ist additiv und linksexakt. Sei Y eine abgeschlossene Teilmenge eines topologischen Raumes X. Der Funktor $\Gamma_Y(X,\_\,)$ ist additiv und linksexakt.

Beweis:
Wir zeigen die Behauptung für den Fall Γ_I. Der Beweis für den Funktor $\Gamma_Y(X,\_\,)$ geht ähnlich einfach. Additivität von Γ_I ist klar. Sei also

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln. Es ist $ker(\Gamma_I(f)) \subseteq ker(f) = 0$ und $im(\Gamma_I(f)) \subseteq \Gamma_I(M'') \cap im(f) \subseteq \Gamma_I(M'') \cap ker(g) = ker(\Gamma_I(g))$. Ist $m \in ker(\Gamma_I(g))$, so gibt es wegen $m \in ker(g) = im(f)$ ein $n \in M'$ mit $m = f(n)$. Ist $I^n m = 0$, so ist $f(I^n \cdot n) = I^n \cdot f(n) = I^n \cdot m = 0$ und also $I^n \cdot n = 0$, folglich $n \in \Gamma_I(M')$. Somit ist $m = (\Gamma_I(f))(n)$ und Lemma 1.1 gezeigt.

Wir können also die Rechtsableitungen dieser Funktoren bilden:

Definition

Sei I ein Ideal von einem noetherschen Ring R. Die Rechtsableitungen von Γ_I werden als $(H^i_I)_{i\in\mathbb{N}}$ geschrieben und als lokale Kohomologiefunktoren mit Träger in I bezeichnet. Sei Y abgeschlossene Teilmenge eines topologischen Raumes X. Die Rechtsableitungen des Funktors $\Gamma_Y(X,\_\,)$ (bzw. $\Gamma(X,\_\,)$) werden $(H^i_Y(X,\_\,))_{i\in\mathbb{N}}$ (bzw. $(H^i(X,\_\,))_{i\in\mathbb{N}}$) geschrieben und als Kohomologiefunktoren mit Träger in Y (bzw. als globale Kohomologiefunktoren bezeichnet) bezeichnet.

Wir kommen nun zu der eingangs erwähnten Berechnungsmöglichkeit der lokalen Kohomologie, d.h. eigentlich zu einer Darstellung, die weniger abstrakt als die Einführung via Rechtsableitung ist. Hierzu ist zunächst folgende Definition nötig:

Definition

Es seien R ein Ring und $x_1, \ldots, x_d \in R$. Für jedes $p \in \mathbb{N}$ setze

$$K^p(x_1, \ldots, x_d; R) := \bigoplus_{1\le i_1 < \ldots < i_p \le d} Re_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}$$

das heißt $K^p(x_1, \ldots, x_d; R)$ ist der freie R-Modul mit Basis $(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p})_{1 \le i_1 < \ldots i_p \le d}$. Wir schreiben die Elemente von $K^p(x_1, \ldots, x_d; R)$ als Tupel $(r_{i_1 \ldots i_p})_{1 \le i_1 < \ldots < i_p \le d}$ mit $r_{i_1 \ldots i_p} \in R$. Durch

$$(d^p((r_{i_1 \ldots i_p})_{1 \le 1_1 < \ldots i_p \le d}))_{1 \le j_1 < \ldots < j_{p+1} \le d} := \sum_{l=1}^{p+1} x_{j_l} (-1)^{l-1} r_{j_1 \ldots \widehat{j_l} \ldots j_{p+1}}$$

wird für $p \in \{0, \ldots, d-1\}$ eine R-lineare Abbildung

$$K^p(x_1, \ldots, x_d; R) \longrightarrow K^{p+1}(x_1, \ldots, x_d; R)$$

definiert. Wie man leicht nachrechnet, ist $(K^\bullet(x_1, \ldots, x_d; R), d^\bullet)$ ein Komplex. Für jeden R-Modul M setzen wir nun

$$K^\bullet(x_1, \ldots, x_d; M) := K^\bullet(x_1, \ldots, x_d; R) \otimes_R M$$

und

$$d_M^\bullet := d^\bullet \otimes_R M$$

$(K^\bullet(x_1, \ldots, x_d; M), d_M^\bullet)$ heißt Koszulkomplex von $x_1, \ldots, x_d$ auf M.

Dieser Komplex ist für sich genommen interessant: Beispielsweise ist er bis auf die d-te Stelle exakt, falls $x_1, \ldots, x_d$ eine M-reguläre Folge ist. Die lokale Kohomologie ensteht aus der Kohomologie dieses Komplexes durch einen gewissen Grenzprozeß, wie später gezeigt wird.

Definition

Sind R ein Ring und $x_1, \ldots, x_d \in R$, so gibt es für alle $n, p \in \mathbb{N}$ einen Homomorphismus

$$\varphi_n^p : K^p(x_1^n, \ldots, x_d^n; R) \longrightarrow K^p(x_1^{n+1}, \ldots, x_d^{n+1}; R)$$

definiert durch

$$\varphi_n^p(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}) := x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_p} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}$$

(für $1 \le i_1 < \ldots < i_p \le d$). Wie man leicht nachrechnet, ist hierdurch ein Morphismus von Komplexen

$$\varphi_n^\bullet : K^\bullet(x_1^n, \ldots, x_d^n; R) \longrightarrow K^\bullet(x_1^{n+1}, \ldots, x_d^{n+1}; R)$$

gegeben. Der induktive Limes des induktiven Systems $\{K^\bullet(x_1^n, \ldots, x_d^n; R)\}_{n \in \mathbb{N}}$ wird mit

$$C^\bullet_{(x_1, \ldots, x_d), R}$$

bezeichnet und heißt Čech-Komplex von $x_1, \ldots, x_d$ auf R. Ist M ein R-Modul, so sei der Čech-Komplex $C^\bullet_{(x_1,\ldots,x_d),M}$ von $x_1, \ldots, x_d$ auf M durch $C^\bullet_{(x_1,\ldots,x_d),R} \otimes_R M$ definiert.

Das folgende Lemma beschreibt den durch diesen Grenzprozeß aus dem Koszulkomplex hervorgegangenen Komplex. Dessen Kohomologie wird sich als die lokale Kohomologie herausstellen.

1.2 Lemma

Sind R ein Ring, M ein R-Modul und $x_1, \ldots, x_d \in R$, so gilt für jedes $p \in \mathbb{N}$

$$C^p_{(x_1,\ldots,x_d),M} = \bigoplus_{1 \le i_1 < \ldots < i_p \le d} M_{x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_p}}$$

und die Differentiation des Komplexes $C^\bullet_{(x_1,\ldots,x_d),M}$ ist auf der Komponente (für $j_1 < \ldots < j_{p+1}$)

$$M_{x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_p}} \longrightarrow M_{x_{j_1} \cdot \ldots \cdot x_{j_{p+1}}}$$

gegeben als $(-1)^s \cdot$ kanonische Abbildung, falls $\{i_1, \ldots, i_p\} = \{j_1, \ldots, \widehat{j_s}, \ldots, j_{p+1}\}$ und als Nullabbildung sonst (das heißt, falls $\{i_1, \ldots, i_p\} \nsubseteq \{j_1, \ldots, j_{p+1}\}$).

Beweis:
Die Behauptung folgt aus der Tatsache, daß für jedes $x \in R$ der induktive Limes des zu $M \xrightarrow{x} M \xrightarrow{x} \ldots$ gehörenden induktiven Systems kanonisch M_x ist.

Die Kohomologie des Čech-Komplexes ist die lokale Kohomologie:

1.3 Satz

Sind R ein noetherscher Ring, $I = (x_1, \ldots, x_d) \subseteq R$ ein Ideal und M ein R-Modul, so gilt

$$H^l_I(M) = H^l(C^\bullet_{(x_1,\ldots,x_d),M})$$

für jedes $l \in \mathbb{N}$.

Beweis:
Nach der zu Beginn von Kapitel 1 erwähnten Charakterisierung von Rechtsableitungen sind folgende drei Aussagen zu zeigen:
i) Es ist $\Gamma_I(M) = H^0(C^\bullet_{(x_1,\ldots,x_d),M})$.
ii) Ist

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln, so existiert eine sich funktoriell verhaltende exakte Sequenz ("lange exakte Kohomologiesequenz")

$$0 \longrightarrow H^0(C^\bullet_{(x_1,\dots,x_d),M'}) \longrightarrow H^0(C^\bullet_{(x_1,\dots,x_d),M}) \longrightarrow H^0(C^\bullet_{(x_1,\dots,x_d),M'} \dots)$$

$$\dots \longrightarrow H^1(C^\bullet_{(x_1,\dots,x_d),M'}) \longrightarrow H^1(C^\bullet_{(x_1,\dots,x_d),M}) \longrightarrow H^1(C^\bullet_{(x_1,\dots,x_d),M'} \dots)$$

$$\longrightarrow \dots$$

iii) Ist E ein injektiver R-Modul, so ist $H^l(C^\bullet_{(x_1,\dots,x_d),E}) = 0$ für jedes $l \geq 1$.

Zu i): Es gilt

$$H^0(C^\bullet_{(x_1,\dots,x_d),M}) = ker(M \xrightarrow{\text{kan}} \bigoplus_{i=1}^{d} M_{x_i}) = \Gamma_I(M)$$

wie gewünscht.

Zu ii): Durch Tensorieren obiger kurzer exakter Sequenz mit $C^\bullet_{(x_1,\dots,x_d),R}$ erhält man einen Komplex von kurzen exakten Sequenzen. Anwendung des Schlangenlemmas liefert die gewünschte Sequenz.

Zu iii): Wir können ohne Einschränkung $E = E_R(R/\mathfrak{p})$ mit einem $\mathfrak{p} \in Spec(R)$ annehmen (hierbei bezeichnet $E_R(R/\mathfrak{p})$ eine R-injektive Hülle von $R/\mathfrak{p}$), da sich jeder injektive R-Modul als direkte Summe solcher Moduln schreiben läßt.

1. Fall: $I \subseteq \mathfrak{p}$.

Für jedes $t \in I$ ist $Ass_R(E_t) = \{\mathfrak{p} \in Ass(E) | t \notin \mathfrak{p}\} = \emptyset$ und also $E_t = 0$. Also ist für jedes $l \geq 1$ sogar $C^l_{(x_1,\dots,x_d),E} = 0$.

2. Fall: $I \not\subseteq \mathfrak{p}$.

Sei etwa $x_i \notin \mathfrak{p}$. Dann ist $E_{x_i} = E$. Es reicht zu zeigen, daß auf dem Komplex $C^\bullet_{(x_1,\dots,x_d),E}$ die Identität homotop zur Nullabbildung ist, denn dann ist sogar $H^l(C^\bullet_{(x_1,\dots,x_d),E}) = 0$ für jedes $l \in \mathbb{N}$. Hierzu sei für $p \geq 1$ eine Abbildung

$$s^p : \bigoplus_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq d} E_{x_{i_1} \cdot \dots \cdot x_{i_p}} \longrightarrow \bigoplus_{1 \leq j_1 < \dots < j_{p-1} \leq d} E_{x_{j_1} \cdot \dots \cdot x_{j_{p-1}}}$$

durch

$$s^p((e_{i_1 \dots i_p}))_{j_1 \dots j_{p-1}} := \begin{cases} 0 & \text{falls } i \in \{j_1, \dots, j_{p-1}\} \\ e_{j_1 \dots j_{s-1} i j_s \dots j_{p-1}} & \text{falls } j_1 < \dots < j_{s-1} < i < j_s < \dots < j_{p-1} \end{cases}$$

für $(e_{i_1 \dots i_p}) = (e_{i_1 \dots i_p})_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq d}$ definiert. Beachte hierbei, daß alle im Komplex $C^\bullet_{(x_1,\dots,x_d),E}$ vorkommenden Moduln direkte Summen von Kopien von E sind. $(s^p)_{p \geq 1}$

definiert nun die gewünschte Homotopie: Offenbar ist $s^1 \circ \delta^0$ die Identität. Ist $p \geq 1$, so betrachte $\delta^{p-1} \circ s^p + s^{p+1} \circ \delta^p$, eingeschränkt auf die Komponente

$$E_{x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_p}} \longrightarrow E_{x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_p}}$$

Ist $i \notin \{i_1, \ldots, i_p\}$, so ist $\delta^{p-1} \circ s^p$ auf der betrachteten Komponente die Nullabbildung und $s^{p+1} \circ \delta^p$ die Identität. Ist hingegen $i \in \{i_1, \ldots, i_p\}$, so ist $s^{p+1} \circ \delta^p$ auf der betrachteten Komponente die Nullabbildung und $\delta^{p-1} \circ s^p$ die Identität. Damit ist der Satz bewiesen.

Ergänzend zu Satz 1.3 sei angemerkt, daß die lokale Kohomologie nicht nur die Kohomologie des Čech-Komplexes, sondern auch der direkte Limes der Kohomologien der einzelnen Koszul-Komplexe ist, da der direkte Limes als Funktor exakt ist und also mit Kohomologiebilden vertauscht. Für die angekündigte Berechnungsmethode der globalen Kohomologie quasiprojektiver Varietäten sei zunächst an folgenden Satz erinnert ($\check{H}$ bezeichnet die übliche Čech-Kohomologie):

1.4 Satz

Sind (X, O_X) ein noethersches separiertes Schema und $\mathfrak{U}$ eine offene affine Überdeckung von X, so gilt für jeden quasikohärenten O_X-Modul $\mathfrak{F}$ und für jedes $l \in \mathbb{N}$

$$H^l(X, \mathfrak{F}) = \check{H}^l(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$$

Beweis:
Siehe [Ku], Korollar 3.8.

Mit Satz 1.4 können wir nun zeigen:

1.5 Satz

Es seien k ein Körper, $J \subseteq k[X_0, \ldots, X_n]$ ein homogenes Ideal, $I \subseteq R := k[X_0, \ldots, X_n]/J$ ein homogenes Ideal und M ein graduierter R-Modul. Es bezeichne $U := Proj(R) \backslash \mathcal{V}^+(I)$. Dann gilt für jedes $l \geq 1$

$$\bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} H^l(U, \widetilde{M(n)}|U) = H_I^{l+1}(M)$$

Beweis:
Sind $t_0, \ldots, t_r \in R$ ein homogenes Erzeugendensystem des homogenen Ideals I, so ist $\mathfrak{U} := \{D_+(t_0), \ldots, D_+(t_r)\}$ eine offene affine Überdeckung von U. Mit diesem

Überdeckungssystem $\mathfrak{U}$ können wir also Satz 1.4 auf die linke Seite der behaupteten Gleichheit anwenden. Außerdem können wir Satz 1.3 auf die rechte Seite anwenden. Man sieht leicht, das in beiden Fällen das Gleiche herauskommt.

Der Rest des Kapitels ist eine Zusammenstellung einiger wohlbekannter Eigenschaften der lokalen Kohomologie; all diese Aussagen werden in den späteren Kapiteln benötigt.

1.6 Bemerkungen

i) Aus Satz 1.3 folgt leicht, daß die lokale Kohomologie mit flachem Basiswechsel verträglich ist, d.h.: Sind R ein noetherscher Ring, $I \subseteq R$ ein Ideal, M ein R-Modul und S eine flache noethersche R-Algebra, so ist

$$H^l_I(M) \otimes_R S = H^l_{IS}(M \otimes_R S)$$

für jedes $l \in \mathbb{N}$.
ii) Weiterhin folgt aus Satz 1.3 auch folgende Basiswechseleigenschaft: Sind $\varphi : R \longrightarrow R'$ ein Homomorphismus noetherscher Ringe, $I \subseteq R$ ein Ideal und M ein R'-Modul, so ist

$$H^l_I({}_RM) =_R (H^l_{IR'}(M))$$

für jedes $l \in \mathbb{N}$. Hierbei bedeutet ${}_RM$, daß M als R-Modul aufzufassen ist.
iii) Sind R ein Ring, M ein R-Modul und $I \subseteq R$ ein Ideal, so gilt $H^l_I(M) = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}}(Ext^l_R(R/I^n, M))$ für jedes $l \in \mathbb{N}$, wobei das der rechten Seite zugrundeliegende induktive System funktoriell durch die kanonischen Abbildungen $R/I^{n+1} \longrightarrow R/I^n$ (für $n \in \mathbb{N}$) induziert wird. Dies liegt an der Definition der Rechtsableitung und der Exaktheit des induktiven Limes.
iv) Unmittelbar aus Satz 1.3 folgt auch, daß lokale Kohomologie mit beliebigen direkten Limites "vertauscht", d.h. ist $(M_i)_{i \in J}$ ein direktes System von Moduln über einem noetherschen Ring R und I ein Ideal von R, so gilt kanonisch $H^t_I(\varinjlim_{i \in J} M_i) = \varinjlim_{i \in J}(H^t_I(M_i))$.

Wir kommen nun zu ersten Aussagen über das Verschwinden der lokalen Kohomologie; insbesondere wird gezeigt, daß im noetherschen Fall fast alle lokalen Kohomologiemoduln verschwinden.

Definition

Es seien R ein Ring und $I \subseteq R$ ein Ideal. Ist

$$\{l \in \mathrm{N} | \forall_{M R-\text{Modul}} \forall_{t \geq l+1} H_I^t(M) = 0\}$$

nicht leer, so heißt $cd(I) := min\{l \in \mathrm{N} | \forall_{M R-\text{Modul}} \forall_{t \geq l+1} H_I^t(M) = 0\}$ die kohomologische Dimension von I. Ansonsten setzen wir $cd(I) := \infty$.

Definition

Es seien R ein noetherscher Ring und $I \subseteq R$ ein Ideal. Dann heißt

$$\begin{aligned} ara(I) :&= min\{n \in \mathrm{N} | \text{Es gibt } r_1, \ldots, r_n \in R \text{ mit } \sqrt{I} = \sqrt{(r_1, \ldots, r_n)}\} \\ &= min\{n \in \mathrm{N} | \text{Es gibt } r_1, \ldots, r_n \in I \text{ mit } \sqrt{I} = \sqrt{(r_1, \ldots, r_n)}\} \end{aligned}$$

der arithmetische Rang von I.

Aus Satz 1.3 ergibt sich eine erste Abschätzung für die kohomologische Dimension:

1.7 Satz

Sind R ein noetherscher Ring und $I \subseteq R$ ein Ideal, so gilt

$$cd(I) \leq ara(I) < \infty$$

Beweis:
Die zweite Ungleichung gilt, da R noethersch ist. Zum Beweis der ersten Ungleichung seien ein R-Modul M, $t > ara(I)$ und $r_1, \ldots r_{ara(I)} \in R$ mit $\sqrt{I} = \sqrt{(r_1, \ldots, r_{ara(I)})}$ vorgegeben. Dann gilt

$$H_I^t(M) = H^t_{(r_1, \ldots, r_{ara(I)})}(M) \overset{\text{Satz 1.3}}{=} 0$$

Es folgt die Behauptung.

Satz 1.7 macht eine Aussage über die "letzte" nicht verschwindende lokale Kohomologie. Der folgende Satz hingegen charakterisiert die Stelle, an der die lokale Kohomologie zum "ersten" mal nicht verschwindet; es handelt sich um die Tiefe.

1.8 Satz

Sind R ein noetherscher Ring, $I \subseteq R$ ein Ideal und M ein endlich erzeugter R-Modul, so ist $depth(I, M)$ genau dann endlich, wenn es ein $t \in \mathbb{N}$ gibt mit $H_I^t(M) \neq 0$. In diesem Falle gilt

$$depth(I, M) = min\{t \in \mathbb{N} | H_I^t(M) \neq 0\}$$

Beweis:
1. Fall: Es ist $depth(I, M) = \infty$.
Nach Definition der Tiefe bedeutet dies $IM = M$. Aus dem Lemma von Nakayama folgt $Supp_R(M) \cap \mathcal{V}(I) = \emptyset$. Andererseits ist die lokale Kohomologie nach Bemerkung 1.6 i) mit flachem Basiswechsel verträglich, vertauscht also insbesondere mit Lokalisation, woraus unmittelbar $Supp_R(H_I^t(M)) \subseteq Supp_R(M) \cap \mathcal{V}(I) = \emptyset$, das heißt $H_I^t(M) = 0$ für jedes $t \in \mathbb{N}$ folgt.
2. Fall: Es ist $r := depth(I, M) < \infty$.
Beweis durch Induktion nach r:
$r = 0$: Dann ist $I \subseteq \bigcup_{\mathfrak{p} \in Ass_R(M)} \mathfrak{p}$. Also existiert ein $\mathfrak{p} \in Ass_R(M)$ mit $I \subseteq \mathfrak{p}$. Sei $0 \neq m \in M$ mit $\mathfrak{p} \cdot m = 0$; es folgt $I \cdot m = 0$, insbesondere ist $0 \neq m \in H_I^0(M)$.
$r > 0$: Sei $x \in I$ regulär auf M. Dann ist $H_{(x)}^0(M) = 0$, insbesondere ist $H_I^0(M) = 0$. Setze $\overline{M} := M/(x)M$. Es gilt $depth(I, \overline{M}) = depth(I, M) - 1$. Aus der kurzen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{x} M \longrightarrow \overline{M} \longrightarrow 0$$

erhält man für jedes $i \geq 1$ eine exakte Sequenz

$$H_I^{i-1}(\overline{M}) \longrightarrow H_I^i(M) \xrightarrow{x} H_I^i(M)$$

Aus der Induktionsannahme, angewendet auf den R-Modul $\overline{M}$, folgt also, daß für jedes $i \in \{1, \ldots, r-1\}$ die Multiplikation $H_I^i(M) \xrightarrow{x} H_I^i(M)$ injektiv ist. Da andererseits (sogar für jedes $i \in \mathbb{N}$) jedes Element von $H_I^i(M)$ von einer Potenz von I annulliert wird (dies folgt aus der Definition der lokalen Kohomologie oder aus Bemerkung 1.6 iii)), muß für jedes $i \in \{1, \ldots, r-1\}$ $H_I^i(M) = 0$ gelten. Es bleibt $H_I^r(M) \neq 0$ zu zeigen: Aus der oben betrachteten kurzen exakten Sequenz erhält man eine exakte Sequenz

$$H_I^{r-1}(M) \longrightarrow H_I^{r-1}(\overline{M}) \longrightarrow H_I^r(M)$$

Es wurde bereits $H_I^{r-1}(M) = 0$ gezeigt und nach Induktionsannahme ist $H_I^{r-1}(\overline{M}) \neq 0$; also gilt $H_I^r(M) \neq 0$.

1.9 Bemerkung

Im Zusammenhang mit Satz 1.8 ist folgender Spezialfall interessant: Wird in der Situation von Satz 1.8 das Ideal I von einer M-regulären Folge $x_1, \ldots, x_t$ erzeugt, so folgt aus den Sätzen 1.7 und 1.8, daß $H_I^t(M) \neq 0$ ist und alle anderen lokalen Kohomologiemoduln von M mit Träger in I verschwinden. Die Beschreibung der lokalen Kohomologie als Limes von Koszul-Kohomologien (Definition des Čech-Komplexes und Satz 1.3) liefert genauer $H_I^t(M) = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} (M/(x_1^n, \ldots, x_t^n)M)$. Die zum direkten System gehörenden Abbildungen werden jeweils von der Multiplikation mit $x_1 \cdot \ldots \cdot x_t$ induziert; diese Abbildungen sind injektiv (siehe [Ku, Lemma 4.15.]). In dieser Situation hat man somit eine einfache Beschreibung der lokalen Kohomologie.

Es besteht neben Beziehungen der kohomologischen Dimension zu arithmetischem Rang und Tiefe auch ein Zusammenhang mit der Krull-Dimension: Dieser ist Inhalt von Satz 1.11; der Beweis benötigt

1.10 Lemma

Sind $(R, \mathfrak{m})$ ein d-dimensionaler noetherscher lokaler Ring und $I \subsetneq R$ ein Ideal, dann ist

$$ara(I) \leq d$$

Beweis:
Durch Induktion nach d:
$d = 0$: Klar wegen $\sqrt{I} = \sqrt{(0)}$.
$d > 0$: Seien $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_t$ genau die Elemente von $Min(R) \backslash \mathcal{V}(I)$. Ohne Einschränkung gelte $t \geq 1$. Sei $x \in I \setminus (\mathfrak{p}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{p}_t)$. Setze

$$J := (\sqrt{(x)} : I)$$

Ohne Einschränkung gelte $J \subsetneq R$ (sonst ist $x \in I \subseteq \sqrt{(x)}$, also $ara(I) \leq 1$).
Behauptung: Es ist $ara(I) \leq ara((I + J)/J) + 1$.
Beweis der Behauptung: Seien $a_1, \ldots, a_l \in I$ mit $\sqrt{(a_1 + J, \ldots, a_l + J)} = \sqrt{(I + J)/J}$. Es reicht nun, $\sqrt{(a_1, \ldots, a_l, x)} = \sqrt{I}$ zu zeigen: Daß die linke Seite in der rechten enthalten ist, ist klar; zum Beweis der anderen Inklusion seien $r \in R$, $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $r^{n_0} \in I$. Nach Wahl der $a_1, \ldots, a_l$ gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit einer Darstellung

$$r^{n_1} + J = \sum_{i=1}^{t} a_i r_i + J$$

wobei $r_1, \ldots, r_t \in R$. Wegen $r^{n_0} \in I$ und der Definition von J gilt also

$$r^{n_0}(r^{n_1} - \sum_{i=1}^{t} a_i r_i) \in \sqrt{(x)}$$

Sei nun $n_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$r^{n_0 n_2}(r^{n_1} - \sum_{i=1}^{t} a_i r_i)^{n_2} \in (x)$$

Hieraus folgt

$$r^{n_0 n_2} r^{n_1 n_2} \in (a_1, \ldots, a_l) + (x)$$

und die Behauptung ist gezeigt. Weiterhin gilt $dim(R/J) < dim(R)$, denn für jedes $\mathfrak{p} \in Min(R)$ ist $J \not\subseteq \mathfrak{p}$. Für die minimalen Primideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_t$ von R ist dies klar wegen $x \notin \mathfrak{p}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{p}_t$. Ist hingegen $\mathfrak{p} \in Min(R)$ mit $I \subseteq \mathfrak{p}$, so folgt aus $x \in \mathfrak{p}$

$$\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} = \sqrt{(x)R_\mathfrak{p}} = \sqrt{(x)}R_\mathfrak{p}$$

mit Lokalisation

$$R_\mathfrak{p} = (\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} : IR_\mathfrak{p}) = (\sqrt{(x)}R_\mathfrak{p} : IR_\mathfrak{p}) = JR_\mathfrak{p}$$

und wegen $J \subsetneq R$, daß $J \not\subseteq \mathfrak{p}$ gilt.
Somit können wir die Induktionsannahme auf den Ring R/J anwenden und mit obiger Behauptung ergibt sich

$$ara(I) - 1 \leq ara((I+J)/J) \leq dim(R/J) \leq dim(R) - 1$$

wie gewünscht.

1.11 Satz

Es seien R ein noetherscher Ring, $I \subseteq R$ ein Ideal und M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann ist $H_I^i(M) = 0$ für jedes $i > dim_R(M)$. Insbesondere ist $cd(I) \leq dim(R)$.

Beweis:
Wegen Bemerkung 1.6 i) können wir ohne Einschränkung R als lokal annehmen. Außerdem gelte $I \subsetneq R$ und $M \neq 0$. Gemäß Lemma 1.10 gilt $ara((I + Ann_R(M))/Ann_R(M)) \leq dim_R(M)$, also ist nach Satz 1.7 $H^i_{(I+Ann_R(M))/Ann_R(M)}(M) = 0$ für jedes $i > dim_R(M)$; aus Bemerkung 1.6 ii) folgt die Behauptung.

Handelt es sich um das maximale Ideal eines lokalen Rings, so ist die kohomologische Dimension des gegebenen Ideals sogar gleich der Krull-Dimension:

1.12 Satz

Sind $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler noetherscher Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul, so ist $H_{\mathfrak{m}}^{dim_R(M)}(M) \neq 0$. Insbesondere gilt $cd(\mathfrak{m}) = dim(R)$.

Beweis:
Siehe [BS], Theorem 6.1.4.

Der folgende Satz zeigt, daß zur Berechnung der kohomologischen Dimension eines Ideals nicht alle Moduln zur Konkurrenz zugelassen werden müssen.

1.13 Satz

Es seien R ein noetherscher Ring, $I \subseteq R$ ein Ideal, M ein endlich erzeugter R-Modul und $n \in \mathbb{N}$. Dann sind äquivalent:
i) Für jedes $l \geq n$ und jedes $\mathfrak{p} \in Supp_R(M)$ gilt $H_I^l(R/\mathfrak{p}) = 0$.
ii) Für jedes $l \geq n$ gilt $H_I^l(M) = 0$.
Insbesondere gilt $cd(I) = max\{n \in \mathbb{N} | H_I^n(R) \neq 0\}$.

Beweis:
i) $\Rightarrow$ ii): Es sei

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_{s-1} \subseteq M_s = M$$

eine Filtrierung von M mit $M_i/M_{i-1} \cong R/\mathfrak{p}_i$ ($i \in \{1, \ldots, s\}$), wobei $\mathfrak{p}_i \subseteq R$ Primideal ($i \in \{1, \ldots, s\}$). Dann ist $\mathfrak{p}_i \in Supp_R(M)$ für jedes $i \in \{1, \ldots, s\}$ und also gilt $H_I^l(R/\mathfrak{p}_i) = 0$ für jedes $l \geq n$. Aus den (für $i \in \{1, \ldots, s\}$) zu den kurzen exakten Sequenzen

$$0 \longrightarrow M_{i-1} \longrightarrow M_i \longrightarrow M_i/M_{i-1} \longrightarrow 0$$

gehörenden langen exakten Kohomologiesequenzen folgt induktiv die Behauptung.
ii) $\Rightarrow$ i): Durch absteigende Induktion nach n können wir annehmen, daß die Behauptung für $l \geq n + 1$ richtig ist. Wäre die Behauptung falsch, könnten wir ein $\mathfrak{p}$ maximal in $\{\mathfrak{p} \in Supp_R(M) | H_I^l(R/\mathfrak{p}) \neq 0\}$ wählen. Wegen $\mathfrak{p} \in Supp_R(M)$ ist $Hom_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}M_\mathfrak{p}, R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}) \neq 0$, also gibt es eine nichttriviale Abbildung $M \xrightarrow{f} R/\mathfrak{p}$. Wir betrachten die zu

$$0 \longrightarrow im(f) \longrightarrow R/\mathfrak{p} \longrightarrow coker(f) \longrightarrow 0$$

gehörende lange exakte Kohomologiesequenz. Wegen $Supp_R(coker(f)) \subseteq \mathcal{V}(\mathfrak{p}) \setminus \{\mathfrak{p}\}$ und der Richtung i)$\Rightarrow$ii) folgt aus der Wahl von $\mathfrak{p}$, daß für jedes $l \geq n$

$$H_I^l(coker(f)) = 0$$

gilt. Da $im(f)$ ein Quotient von M ist, reicht es offenbar, folgende Behauptung zu zeigen:
Behauptung: Ist $N = M/U$ mit einem R-Untermodul $U \subseteq M$, so ist für jedes $l \geq n$

$$H_I^l(N) = 0$$

Nach Induktionsannahme und der Richtung i)⇒ii) ist für jedes $l \geq n+1$

$$H_I^l(U) = 0$$

Also folgt aus der zu

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

gehörenden langen exakten Kohomologiesequenz die Behauptung.

Der folgende Satz beschreibt die Mayer-Vietoris-Sequenz: Sie ist ein zentrales Hilfsmittel in Kapitel 2.

1.14 Satz (Mayer-Vietoris-Sequenz)

Sind R ein noetherscher Ring, $I, J \subseteq R$ Ideale und M ein R-Modul, so gibt es eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \Gamma_{I+J}(M) \longrightarrow \Gamma_I(M) \oplus \Gamma_J(M) \longrightarrow \Gamma_{I\cap J}(M) \longrightarrow \dots$$
$$\dots \longrightarrow H_{I+J}^l(M) \longrightarrow H_I^l(M) \oplus H_J^l(M) \longrightarrow H_{I\cap J}^l(M) \longrightarrow \dots \quad .$$

Dabei sind alle Abbildungen bis aufs Vorzeichen die kanonischen.

Beweis:
Siehe [BS], 3.2.3.

Ein wichtiger Bestandteil im Beweis des Satzes von Faltings (siehe auch Kapitel 3) ist die Grothendieck-Spektralsequenz:

1.15 Satz

Sind R ein noetherscher Ring und $I, J \subseteq R$ Ideale, so gibt es für jeden R-Modul M eine Spektralsequenz

$$E_2^{p,q} = H_J^p(H_I^q(M)) \Rightarrow H_{I+J}^{p+q}(M)$$

die sogenannte Spektralsequenz für zusammengesetzte Funktoren (oder Grothendieck-Spektralsequenz).

Beweis:
Gemäß [Wei], Theorem 5.8.3 ist nur zu zeigen, daß für jeden injektiven R-Modul E und für jedes $l \geq 1$

$$H^l_J(\Gamma_I(E)) = 0$$

gilt. Dazu können wir ohne Einschränkung annehmen, daß $E = E_R(R/\mathfrak{p})$ die injektive Hülle von $R/\mathfrak{p}$ für ein $\mathfrak{p} \subseteq R$ Primideal ist. Wegen $Ass_R(E_R(R/\mathfrak{p})) = \{\mathfrak{p}\}$ ist dann entweder $\Gamma_I(E) = E$ (falls $I \subseteq \mathfrak{p}$) oder $\Gamma_I(E) = 0$ (sonst) und die Behauptung folgt.

Es wurde gezeigt, daß für einen d-dimensionalen lokalen Ring $(R, \mathfrak{m})$ stets $H^d_{\mathfrak{m}}(R) \neq 0$, also $cd(\mathfrak{m}) = d$ gilt. Die Ideale I mit $cd(I) = d$ sind im kompletten integren Fall genau die $\mathfrak{m}$-primären: Dies ist der Inhalt des Satzes von Hartshorne-Lichtenbaum. Dieser nichttriviale Satz klärt somit, für welche Ideale die kohomologische Dimension kleiner als die Krull-Dimension des Rings ist.

1.16 Satz (Hartshorne-Lichtenbaum)

Sind $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler noetherscher kompletter integrer d-dimensionaler Ring und $I \subseteq R$ ein Ideal, so sind folgende Bedingungen äquivalent:
i) Es ist $dim(R/I) > 0$.
ii) Es ist $H^d_I(R) = 0$.

Beweis:
ii) $\Rightarrow$ i): Ohne Einschränkung sei $I = \mathfrak{m}$ vorausgesetzt und $H^d_I(R) \neq 0$ zu zeigen. Die Behauptung folgt aus Satz 1.12.
i) $\Rightarrow$ ii): Folgt aus [BS], 8.2.10.

Was die Aussage von Satz 1.16 unter allgemeinen Voraussetzungen bedeutet, zeigt das folgende Korollar:

1.17 Korollar

Es seien $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler noetherscher d-dimensionaler Ring und $I \subsetneq R$ ein Ideal. Für jedes $\mathfrak{P} \in Spec(\hat{R})$ mit $dim(\hat{R}/\mathfrak{P}) = d$ gelte $\sqrt{I\hat{R} + \mathfrak{P}} \neq \mathfrak{m}$. Dann ist $H^d_I(R) = 0$, das heißt $cd(I) \leq d - 1$.

Beweis:
Satz 1.11 zeigt $cd(I) \leq d$. Wegen der Treuflachheit von $\hat{R}/R$ und Bemerkung 1.6 i) nehmen wir ohne Einschränkung an, daß R komplett ist. Dann liefert Satz 1.16

$$0 = H^d_{I+\mathfrak{P}}(R/\mathfrak{P}) \overset{\text{Bemerkung 1.6 ii)}}{=} H^d_I(R/\mathfrak{P})$$

für jedes $\mathfrak{P} \in Spec(R)$ mit $dim(R/\mathfrak{P}) = d$. Ist $\mathfrak{Q} \in Spec(R)$ mit $dim(R/\mathfrak{Q}) < d$, so ist $H_I^d(R/\mathfrak{Q}) = 0$ nach Satz 1.11. Die Behauptung folgt nun aus Satz 1.13.

2. Zur Endlichkeit der Menge der assoziierten Primideale

Da die Struktur der lokalen Kohomologiemoduln noch weithin unklar ist, würde es zu ihrem Verständnis beitragen, die Endlichkeit möglichst vieler ihrer Invarianten zu zeigen; eine solche Invariante ist die Zahl ihrer assoziierten Primideale (andere wären z.B. ihre Bass-Zahlen, siehe [HS], Theorem 2.1 und [Ly], Theorem 3.4).

Dieses Kapitel behandelt also die Frage, ob jeder lokale Kohomologiemodul nur endlich viele assoziierte Primideale hat. Hierzu wurde folgende Vermutung (sogar in allgemeinerer Form) von Huneke formuliert (vgl. [Hu], Conjecture 5.1):

Vermutung (Huneke):

Sind $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Cohen-Macaulay-Ring, $I \subseteq R$ ein Ideal und ist $t \in \mathbb{N}$, so ist $AssH_I^t(R)$ endlich.

Diese Vermutung wird im folgenden mit (*) bezeichnet. Hauptaussage dieses Kapitels ist es, daß man sich beim Beweis von Vermutung (*) auf einen bzw. zwei bestimmte Spezialfälle beschränken kann. Darüberhinaus konnte die Vermutung mit den hier entwickelten Methoden in (anderen) Spezialfällen direkt bewiesen werden. Ein Beispiel für letzteres ist

2.1 Satz

Es seien $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring, M ein endlich erzeugter R-Modul, $I \subseteq R$ ein Ideal und $t = depth(I, M)$. Dann ist

$$Ass_R(H_I^t(M)) \subseteq Ass_R(Ext_R^t(R/I, M))$$

insbesondere ist $Ass_R(H_I^t(M))$ endlich.

Beweis:
Sei $\mathfrak{p} \in Ass_R(H_I^t(M))$. Dann ist insbesondere $H_{IR_\mathfrak{p}}^t(M_\mathfrak{p}) \neq 0$ und also wegen $t \geq depth(IR_\mathfrak{p}, M_\mathfrak{p}) \geq depth(I, M) = t$ ohne Einschränkung $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$.
Also ist $Hom_R(R/\mathfrak{m}, H_I^t(M)) \neq 0$. Folglich existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$Hom_R(R/\mathfrak{m}, Ext_R^t(R/I^n, M)) \neq 0$$

Ist nun $x_1, \dots, x_t \in I$ eine M-reguläre Folge, so gilt nach bekannten Regeln für das Rechnen mit Ext:

$$\begin{aligned} Hom_R(R/\mathfrak{m}, Ext^t_R(R/I^n, M)) &= Hom_R(R/\mathfrak{m}, Hom_R(R/I^n, M/(x_1^n, \dots, x_t^n)M)) \\ &= Hom_R(R/\mathfrak{m}, M/(x_1^n, \dots, x_t^n)M) \\ &= Hom_R(R/\mathfrak{m}, Hom_R(R/I, M/(x_1^n, \dots, x_t^n)M)) \\ &= Hom_R(R/\mathfrak{m}, Ext^t_R(R/I, M)) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Also ist $\mathfrak{m} \in Ass_R(Ext^t_R(R/I, M))$, was zu zeigen war.

2.2 Lemma

Es seien R ein noetherscher Ring, M ein R-Modul und $I, J \subseteq R$ Ideale mit $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{J}$. Dann ist

$$H^l_I(M) = H^l_I(M/\Gamma_J(M))$$

für jedes $l \geq 1$.

Beweis:
Betrachtet man die zu der kurzen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \Gamma_J(M) \longrightarrow M \longrightarrow M/\Gamma_J(M) \longrightarrow 0$$

gehörende lange exakte Γ_I-Sequenz, so erkennt man, daß es reicht,

$$H^l_I(\Gamma_J(M)) = 0$$

für jedes $l \geq 1$ zu zeigen. O.E. sei M endlich erzeugt (schreibe hierzu M als die Vereinigung seiner endlich erzeugten Untermoduln). Für $n >> 0$ ist $\Gamma_J(M)$ ein R/J^n-Modul. Also gilt

$$H^l_I(\Gamma_J(M)) = H^l_{I(R/J^n)}(\Gamma_J(M)) = H^l_{(0)}(\Gamma_J(M)) = 0$$

für jedes $l \geq 1$.

Ein weiterer Spezialfall von Vermutung (*) wird von folgendem Satz bewiesen:

2.3 Satz

Es seien R ein noetherscher Ring, $I \subseteq R$ ein Ideal und M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann gilt

$$Ass_R(H^1_I(M)) \subseteq Ass_R(Ext^1_R(R/I, M/\Gamma_I(M)))$$

Insbesondere ist $Ass_R(H_I^1(M))$ endlich.

Beweis:
Nach Lemma 2.2 gilt kanonisch

$$H_I^1(M) = H_I^1(M/\Gamma_I(M)) \quad .$$

Wegen $\Gamma_I(M/\Gamma_I(M)) = 0$ ist I in keinem assoziierten Primideal von $M/\Gamma_I(M)$ enthalten, also $depth(I, M/\Gamma_I(M)) \geq 1$. Die Behauptung folgt nun aus den Sätzen 1.8 und 2.1.

Klassifiziert man im Fall eines noetherschen lokalen Cohen-Macaulay-Rings R die lokalen Kohomologiemoduln $H_I^j(R)$ mit $I \subseteq R$ Ideal und $j \in \mathbb{N}$ bis auf Isomorphie (was für den Beweis von Vermutung (*) keine Einschränkung ist), so reicht es, sich auf Ideale I mit $ht(I) = j-1$ oder $ht(I) = j$ zu beschränken. Dies ist der Inhalt des nächsten Satzes. Damit kann man sich beim Beweis von Vermutung (*) auf den Spezialfall $ht(I) = j-1$ beschränken (der Fall $ht(I) = j$ wird von Satz 2.1 erledigt, da R Cohen-Macaulay ist).

2.4 Satz

Es seien $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Cohen-Macaulay-Ring, $I \subsetneq R$ ein Ideal, $j \in \mathbb{N}$ mit $j > ht(I)$ und $H_I^j(R) \neq 0$.
Dann existiert ein Ideal $\tilde{I} \subseteq R$ mit $\tilde{I} \supseteq I$, $ht(\tilde{I}) = j-1$ und so, daß der kanonische Homomorphismus

$$H_{\tilde{I}}^j(R) \longrightarrow H_I^j(R)$$

ein Isomorphismus ist.

Beweis:
Wir können o.E. $ht(I) < j-1$ annehmen. Seien $t = ht(I)$ und $x_1, \ldots, x_t \in I$ eine R-reguläre Folge. Seien $\mathfrak{p}_1, \ldots, p_n$ die assoziierten Primideale von $R/(x_1, \ldots, x_t)$, und zwar so nummeriert, daß

$$I \subseteq \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_r$$

$$I \not\subseteq \mathfrak{p}_{r+1}, \ldots, \mathfrak{p}_n$$

Es ist $r < n$, sonst wäre $\sqrt{I} = \sqrt{(x_1, \ldots, x_t)}$ und also $H_I^j(R) = 0$. Somit können wir ein

$$y \in (\mathfrak{p}_{r+1} \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_n) \setminus (\mathfrak{p}_1 \cup \ldots \mathfrak{p}_r)$$

wählen. Wir betrachten folgenden Ausschnitt einer Mayer-Vietoris-Sequenz:

$$H_{I\cap(y)}^{j-t-1}(H_{(\underline{x})}^t(R)) \longrightarrow H_{(I,y)}^{j-t}(H_{(\underline{x})}^t(R)) \longrightarrow H_I^{j-t}(H_{(\underline{x})}^t(R)) \oplus H_{(y)}^{j-t}(H_{(\underline{x})}^t(R)) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H_{I\cap(y)}^{j-t}(H_{(\underline{x})}^t(R))$$

Dabei haben wir $(\underline{x}) := (x_1, \ldots, x_t)$ gesetzt. Wegen $j - t \geq 2$ und $I \cap (y) \subseteq \sqrt{(\underline{x})}$ folgt hieraus

$$H^j_{(I,y)}(R) = H^{j-t}_{(I,y)}(H^t_{(\underline{x})}(R)) \cong H^{j-t}_I(H^t_{(\underline{x})}(R)) = H^j_I(R)$$

wobei die erste und die letzte Gleichheit aus Satz 1.15 folgen. Nach Wahl von y ist $ht((I, y)) = ht(I) + 1$. Die Behauptung des Satzes folgt nun induktiv.

Es folgt die bereits angekündigte "Vereinfachung" von Vermutung (*):

2.5 Korollar

Seien $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Cohen-Macaulay-Ring und $j \in \mathbb{N}$. Dann sind äquivalent:
i) Für jedes Ideal $I \subseteq R$ gilt: $|Ass_R(H^j_I(R))| < \infty$.
ii) Für jedes Ideal $I \subseteq R$ mit $ht(I) = j - 1$ gilt: $|Ass_R(H^j_I(R))| < \infty$.

Beweis:
Folgt sofort aus Satz 2.1 und Satz 2.4. Mit der Technik von Satz 2.4 läßt sich zeigen, daß es nur endlich viele assoziierte Primideale der Höhe j gibt:

2.6 Korollar

Es seien $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Cohen-Macaulay-Ring, $j \in \mathbb{N}$ und $I \subseteq R$ ein Ideal. Dann ist

$$Supp_R(H^j_I(R)) \cap \{\mathfrak{p} \in Spec(R) | ht(\mathfrak{p}) = j\}$$

endlich. Insbesondere hat $H^j_I(R)$ nur endlich viele assoziierte Primideale der Höhe j.

Beweis:
Ist $ht(I) \geq j$, so ist die Behauptung klar. Also o.E. $ht(I) \leq j - 1$. Wegen Satz 2.4 können wir sogar ohne Einschränkung $ht(I) = j - 1$ annehmen. Seien $x_1, \ldots, x_{j-1} \in I$ eine reguläre Folge und weiterhin $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ die assoziierten Primideale von $R/(x_1, \ldots, x_{j-1})$. Diese Primideale seien so sortiert, daß

$$I \subseteq \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_r$$

und

$$I \not\subseteq \mathfrak{p}_{r+1}, \ldots, \mathfrak{p}_n$$

mit einem $r \in \{0, \ldots, n\}$ gelten. Hierbei können wir o.E. annehmen, daß $r < n$, da sonst $\sqrt{I} = \sqrt{(x_1, \ldots, x_{j-1})}$ und also $H^j_I(R) = H^j_{(x_1,\ldots,x_{j-1})}(R) = 0$ gelten.

Wir setzen $J := \mathfrak{p}_{r+1} \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_n$ und betrachten folgenden Ausschnitt aus der Mayer-Vietoris-Sequenz bezüglich der Ideale I und J, angewendet auf R:

$$H^j_{I+J}(R) \longrightarrow H^j_I(R) \oplus H^j_J(R) \longrightarrow H^j_{(x_1,\ldots,x_{j-1})}(R)$$

Da der ganz rechte Term Null ist, folgt $Supp_R(H^j_I(R)) \subseteq \mathcal{V}(I+J)$ und hieraus schließlich die Behauptung, da $ht(I+J) \geq j$ nach Konstruktion von J gilt.

Die dargestellten Methoden reichen zum Beweis von Vermutung (*) bis einschließlich Dimension drei:

2.7 Korollar

Es seien $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Cohen-Macaulay-Ring mit $dim(R) \leq 3$, $j \in \mathbb{N}$ und $I \subseteq R$ ein Ideal. Dann ist $Ass_R(H^j_I(R))$ endlich.

Beweis:
Wir können annehmen, daß die Dimension von R mindestens zwei ist; andernfalls hätte R ohnehin nur endlich viele Primideale.
1. Fall: $dim(R) = 2$:
Ist $j > 2$, so ist $H^j_I(R) = 0$. Ist $j = 2$, so können wir wegen Korollar 2.5 annehmen, daß I die Höhe eins hat. Dann ist $Ass_R(H^2_I(R))$ als Teilmenge von $\mathcal{V}(I)$ endlich.
Ist $j = 1$, so folgt die Behauptung aus Satz 2.3. Für $j = 0$ ist $H^j_I(R) = \Gamma_I(R)$ endlich erzeugt und folglich $Ass_R(H^j_I(R))$ endlich.
2. Fall: $dim(R) = 3$:
Ist $j > 3$, so ist $H^j_I(R) = 0$. Ist $j = 3$, so können wir wegen Korollar 2.5 annehmen, daß I die Höhe zwei hat; somit ist $\mathcal{V}(I)$ endlich und erst recht $Ass_R(H^j_I(R))$.
Ist $j = 2$, so können wir wegen Satz 2.4 ohne Einschränkung annehmen, daß I die Höhe eins hat. Gemäß Korollar 2.6 hat $H^j_I(R)$ nur endlich viele assoziierte Primideale der Höhe zwei. Da I nur endlich viele Primoberideale der Höhe eins hat, ergibt sich insgesamt $|Ass_R(H^j_I(R))| < \infty$.
Ist $j = 1$, so folgt die Behauptung wieder aus Satz 2.3 und für $j = 0$ ist $H^j_I(R) = \Gamma_I(R)$ endlich erzeugt.

Bevor wir nun zu einer weiteren Reduktion von Vermutung (*) kommen, brauchen wir folgendes einfache

2.8 Lemma

Seien R ein noetherscher Ring, $I \subseteq R$ ein Ideal und M ein R-Modul. Dann ist $Ass_R(M/\Gamma_I(M)) = Ass_R(M) \cap (Spec(R) \backslash \mathcal{V}(I))$.

Beweis:
Sei zunächst $\mathfrak{p} \in Ass_R(M/\Gamma_I(M))$ vorgegeben. Dann gibt es eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow R/\mathfrak{p} \longrightarrow M/\Gamma_I(M)$$

und also auch eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \Gamma_I(R/\mathfrak{p}) \longrightarrow \Gamma_I(M/\Gamma_I(M))$$

Da jedoch $\Gamma_I(M/\Gamma_I(M)) = 0$ gilt, muß auch $\Gamma_I(R/\mathfrak{p}) = 0$ sein. Also ist $\mathfrak{p} \notin \mathcal{V}(I)$.
Sei $m \in M$ mit $\Gamma_I(M) : m = \mathfrak{p}$ vorgegeben. Dann ist auch $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} \cdot \frac{m}{1} = 0$, wobei $\frac{m}{1}$ als Element von $M_\mathfrak{p}$ zu verstehen ist. Es ist $\frac{m}{1} \neq 0$, sonst gäbe es ein $s \in R \setminus \mathfrak{p}$ mit $sm = 0$, also insbesondere mit $sm \in \Gamma_I(M)$ im Widerspruch zu $s \notin \mathfrak{p}$.
Folglich ist $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} \in Ass_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$ und also auch $\mathfrak{p} \in Ass_R(M)$, insgesamt also $\mathfrak{p} \in Ass_R(M) \cap (Spec(R) \backslash \mathcal{V}(I))$. Ist andererseits ein $\mathfrak{p} \in Ass_R(M) \cap (Spec(R) \backslash \mathcal{V}(I))$ vorgegeben, so ist $\mathfrak{p} \notin Ass_R(\Gamma_I(M))$ und mit der kurzen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \Gamma_I(M) \longrightarrow M \longrightarrow M/\Gamma_I(M) \longrightarrow 0$$

folgt die Behauptung $\mathfrak{p} \in Ass_R(M/\Gamma_I(M))$.

2.9 Lemma

Es seien R ein lokaler Cohen-Macaulay-Ring, $I \subsetneq R$ ein Ideal der Höhe t und $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ diejenigen minimalen Primoberideale von I, die Höhe t haben. Setze $I^{pure} := \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_n$. Hat $H^{t+1}_{I^{pure}}(R)$ nur endlich viele assoziierte Primideale, so ist auch $Ass_R(H^{t+1}_I(R))$ endlich.

Beweis:
Seien $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_m$ diejenigen minimalen Primoberideale von I, deren Höhe größer als t ist, o.E. $m \geq 1$. Setze

$$I' := \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \ldots \mathfrak{q}_m$$

Betrachte folgenden Ausschnitt einer Mayer-Vietoris-Sequenz

$$H^{t+1}_{I^{pure}+I'}(R) \longrightarrow H^{t+1}_{I^{pure}}(R) \oplus H^{t+1}_{I'}(R) \longrightarrow H^{t+1}_I(R) \longrightarrow H^{t+2}_{I^{pure}+I'}(R)$$

Da nach Konstruktion $height(I^{pure} + I') \geq t+2$ gilt, ist der linke Term aus obiger Sequenz Null und hat der rechte Term nur endlich viele assoziierte Primideale. Somit folgt aus dieser Sequenz zusammen mit Satz 2.1, daß Endlichkeit von $Ass_R(H^{t+1}_{I^{pure}}(R))$ Endlichkeit von $Ass_R(H^{t+1}_I(R))$ impliziert.

2.10 Satz

Es seien $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Cohen-Macaulay-Ring und $t \in \mathbb{N}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:
i) Für jedes Ideal $I \subseteq R$ ist $Ass_R(H^{t+1}_I(R))$ endlich.
ii) Für jedes Ideal von R von der Form $(x_1, \ldots, x_t, y)$, wobei $x_1, \ldots, x_t \in R$ eine reguläre Folge bilden und $y \in R$ beliebig ist, ist $Ass_R(H^{t+1}_{(x_1,\ldots,x_t,y)}(R))$ endlich.

Beweis:
Es ist nur die Richtung von ii) nach i) zu zeigen: Sei also ein Ideal $I \subsetneq R$ vorgegeben. Wegen Korollar 2.5 können wir o.E. $ht(I) = t$ annehmen. Wegen Lemma 2.9 können wir ohne Einschränkung annehmen, daß alle minimalen Primoberideale von I die Höhe t haben.
Sei nun $x_1, \ldots, x_t \in I$ eine reguläre Folge.
Bekanntlich ist $H^t_{(x_1,\ldots,x_t)}(R) = \varinjlim_{s \in \mathbb{N}} (R/(x_1^s, \ldots, x_t^s))$ und alle Abbildungen des zugehörigen induktiven Systems sind injektiv (dies folgt aus der Beschreibung der lokalen Kohomologie als Limes von Koszul-Kohomologien, siehe Bemerkung 1.9). Mit der zu $\Gamma_I \circ \Gamma_{(x_1,\ldots,x_t)}$ gehörenden Spektralsequenz für zusammengesetzte Funktoren (siehe Satz 1.15) folgt also

$$\begin{aligned}
H^{t+1}_I(R) &= H^1_I(H^t_{(x_1,\ldots,x_t)}(R)) \\
&= H^1_I(\varinjlim_{s \in \mathbb{N}} (R/(x_1^s, \ldots, x_t^s))) \\
&= H^1_I((\varinjlim_{s \in \mathbb{N}} (R/(x_1^s, \ldots, x_t^s)))/\Gamma_I(\varinjlim_{s \in \mathbb{N}} (R/(x_1^s, \ldots, x_t^s)))) \\
&= H^1_I(\varinjlim_{s \in \mathbb{N}} (R/(x_1^s, \ldots, x_t^s)/\Gamma_I(R/(x_1^s, \ldots, x_t^s))))
\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit trivial ist und die vorletzte Gleichheit aus Lemma 2.2 folgt.
Für jedes $s \in \mathbb{N}$ gilt nach Lemma 2.8

$$\begin{aligned}
Ass_R(R/(x_1^s, \ldots, x_t^s)/\Gamma_I(R/(x_1^s, \ldots, x_t^s))) &= \{\mathfrak{p} \in Ass_R(R/(x_1^s, \ldots, x_t^s)) | \mathfrak{p} \not\supseteq I\} \\
&= \{\mathfrak{p} \in Min_R(R/(x_1^s, \ldots, x_t^s)) | \mathfrak{p} \not\supseteq I\}
\end{aligned}$$

Seien nun $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ die minimalen Primoberideale von I; da alle minimalen Primoberideale von I die Höhe t haben, sind diese Primideale auch minimale Primoberideale von $(x_1, \ldots, x_t)$. Seien weiterhin $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_m$ diejenigen minimalen Primoberideale von $(x_1, \ldots, x_t)$, die I nicht umfassen (also genau die "übrigen"). Da zwischen all diesen Primidealen keine Inklusionen bestehen, können wir ein

$$y' \in (\mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_n) \setminus (\mathfrak{q}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{q}_m)$$

wählen und eine geeignete Potenz y von y' mit

$$y \in I \setminus (\mathfrak{q}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{q}_m)$$

finden.
y ist also in keinem assoziierten Primideal von $Ass_R(R/(x_1^s, \ldots, x_t^s)/\Gamma_I(R/(x_1^s, \ldots, x_t^s)))$ enthalten (die Menge der assoziierten Primideale wurde in 2.8 berechnet). Somit operiert y injektiv auf $R/(x_1^s, \ldots, x_t^s)/\Gamma_I(R/(x_1^s, \ldots, x_t^s))$.
Dann operiert y auch auf $\varinjlim_{s \in \mathbb{N}}(R/(x_1^s, \ldots, x_t^s)/\Gamma_I(R/(x_1^s, \ldots, x_t^s)))$ injektiv. Dieser Modul ist $H^t_{(x_1,\ldots,x_t)}(R)/\Gamma_I(H^t_{(x_1,\ldots,x_t)}(R))$ (diese Gleichheit wurde oben behandelt). Somit gilt

$$\begin{aligned} H_I^{t+1}(R) &= H_I^1(H^t_{(x_1,\ldots,x_t)}(R)) \\ &= H_I^1(H^t_{(x_1,\ldots,x_t)}(R)/\Gamma_I(H^t_{(x_1,\ldots,x_t)}(R))) \\ &= \Gamma_I(H^1_{(y)}(H^t_{(x_1,\ldots,x_t)}(R)/\Gamma_I(H^t_{(x_1,\ldots,x_t)}(R)))) \\ &\subseteq H^1_{(y)}(H^t_{(x_1,\ldots,x_t)}(R)/\Gamma_I(H^t_{(x_1,\ldots,x_t)}(R))) \\ &= H^1_{(y)}(H^t_{(x_1,\ldots,x_t)}(R)) \\ &= H^{t+1}_{(x_1,\ldots,x_t,y)}(R) \end{aligned}$$

Hierbei folgen die erste, dritte und letzte Gleichheit jeweils aus einer geeigneten Spektralsequenz für zusammengesetzte Funktoren (vgl. Satz 1.15) und die zweite und die vorletzte aus Lemma 2.2. Ist also gezeigt, daß $H^{t+1}_{(x_1,\ldots,x_t,y)}(R)$ nur endlich viele assoziierte Primideale besitzt, so folgt dies auch für $H_I^{t+1}(R)$. Damit ist der Satz bewiesen.

Mit den Methoden von Satz 2.10 läßt sich Vermutung (*) im Falle eines faktoriellen Cohen-Macaulay-Rings bis einschließlich Dimension vier zeigen:

2.11 Satz

Seien $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler faktorieller Cohen-Macaulay-Ring mit $dim(R) \leq 4$, $I \subseteq R$ ein Ideal und $j \in \mathbb{N}$. Dann ist $Ass_R(H_I^j(R))$ endlich.

Beweis:
Wegen Korollar 2.7 brauchen wir nur den Fall $dim(R) = 4$ zu betrachten. Für $j = 0$ ist $H_I^j(R) = \Gamma_I(R)$ endlich erzeugt und folglich $|Ass_R(H_I^j(R))| < \infty$. Der Fall $j = 1$ folgt aus Satz 2.3.
Ist $j = 3$, so können wir wegen Satz 2.4 annehmen, daß I die Höhe zwei hat. Somit hat $H_I^j(R)$ höchstens endlich viele assoziierte Primideale der Höhe zwei. Nach Korollar 2.6 ist auch $Ass_R(H_I^j(R)) \cap \{height(\mathfrak{p}) = 3\}$ endlich. Somit ist $Ass_R(H_I^j(R))$ endlich.
Ist $j = 4$, so können wir wegen Korollar 2.5 davon ausgehen, daß I die Höhe drei hat. Somit ist $\mathcal{V}(I)$ endlich; erst recht ist $Ass_R(H_I^j(R))$ endlich.
Es bleibt der Fall $j = 2$ zu behandeln: Wegen Satz 2.4 dürfen wir annehmen, daß die Höhe von I eins ist. Gemäß Lemma 2.9 können wir sogar annehmen, daß alle minimalen Primoberideale von I Höhe eins haben. Da R faktoriell vorausgesetzt ist, gibt es ein $r \in R$ mit $\sqrt{I} = \sqrt{(r)}$. Also ist $H_I^2(R) = 0$ und die Behauptung folgt.

Wir kommen nun zu unserer letzten Reduktion von Vermutung (*):

2.12 Satz

Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Cohen-Macaulay-Ring. Dann sind äquivalent:
i) Für jedes $j \in \mathbb{N}$ und jedes Ideal $I \subseteq R$ ist $Ass_R(H_I^j(R))$ endlich.
ii) Folgende zwei Bedingungen sind erfüllt:
a) Sind $x, y \in R$, so ist $Ass_R(H^2_{(x,y)}(R))$ endlich.
b) Sind $y \in R$ und ist $x_1, x_2 \in R$ eine reguläre Folge, so ist $Ass_R(H^3_{(x_1,x_2,y)}(R))$ endlich.

Beweis:
Es ist nur die Richtung von ii) nach i) zu zeigen. Dies geschieht durch Induktion nach j: Der Fall $j = 0$ ist trivial. Der Fall $j = 1$ wird von Satz 2.3 erledigt. Die Fälle $j = 2$ und $j = 3$ sind klar wegen Satz 2.10. Sei also $j \geq 4$: Wegen Satz 2.10 können wir ohne Einschränkung annehmen, daß I von der Form $(x_1, \ldots, x_j)$ mit $x_1, \ldots, x_j \in R$ ist.
Wir setzen $I' := (x_1, \ldots, x_{[j/2]})$, $I'' := (x_{[j/2]+1}, \ldots, x_j) \subseteq R$ (dabei bezeichnet $[\ldots]$ die Gauß-Klammer) und betrachten den Ausschnitt aus der Mayer-Vietoris-Sequenz

$$H_{I'}^{j-1}(R) \oplus H_{I''}^{j-1}(R) \longrightarrow H_{I' \cap I''}^{j-1}(R) \longrightarrow H_I^j(R) \longrightarrow H_{I'}^j(R) \oplus H_{I''}^j(R)$$

Wegen $j \geq 4$ ist sicherlich $j - 1 > j - ([j/2] + 1) + 1$; folglich wird aus obiger Sequenz ein Isomorphismus

$$H_{I' \cap I''}^{j-1}(R) \longrightarrow H_I^j(R)$$

Nach Induktionsannahme hat $H^{j-1}_{I' \cap I''}(R)$ nur endlich viele assoziierte Primideale und die Behauptung folgt.

2.13 Bemerkung

Ist $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler regulärer Ring, so ist Bedingung a) aus Satz 2.12 immer erfüllt, denn: Ist $ht((x, y)) = 2$, so bilden x, y eine reguläre Folge und es gilt $Ass_R(H^2_{(x,y)}(R)) = Min_R(R/(x, y))$; dies folgt aus Bemerkung 1.9. Insbesondere ist $Ass_R(H^2_{(x,y)}(R))$ endlich. Daher können wir wegen Satz 2.4 ohne Einschränkung annehmen, daß $ht((x, y)) = 1$ ist. Wegen Lemma 2.9 können wir ohne Einschränkung annehmen, daß alle minimalen Primoberideale von (x, y) die Höhe eins haben. In diesem Fall ist aber (x, y) bis auf Radikal ein Hauptideal, folglich ist sogar $H^2_{(x,y)}(R) = 0$.

Was nun gemäß Satz 2.12 zum Beweis von Vermutung (*) noch zu zeigen ist, läßt sich auch auf zwei andere Weisen darstellen:

2.14 Bemerkungen

i) Es seien $n \in \{2, 3\}$ und $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Cohen-Macaulay-Ring. Dann ist zum Beweis von Vermutung (*) nur noch

$$|Ass_R((R_{x_1}/R) \otimes \ldots \otimes (R_{x_n}/R))| < \infty$$

für $x_1, \ldots, x_n \in R$ zu zeigen.
Denn:
Aus dem Spektralsequenzen-Argument folgt

$$H^n_{(x_1,\ldots,x_n)}(R) = H^1_{(x_1)}(H^{n-1}_{(x_2,\ldots,x_n)}(R))$$

und aus der Tatsache, daß $H^1_{(x_1)}$ ein rechtsexakter Funktor ist, der mit direkten Summen vertauscht, folgt weiter

$$H^1_{(x_1)}(H^{n-1}_{(x_2,\ldots,x_n)}(R)) = H^1_{(x_1)}(R) \otimes H^{n-1}_{(x_2,\ldots,x_n)}(R)$$

Daraus ergibt sich induktiv

$$H^n_{(x_1,\ldots,x_n)}(R) = H^1_{(x_1)}(R) \otimes \ldots \otimes H^1_{(x_n)}(R) = (R_{x_1}/R) \otimes \ldots \otimes (R_{x_n}/R)$$

ii) Seien nun $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler kompletter Cohen-Macaulay-Ring, $t \in \{1, 2\}$, $x_1, \ldots, x_t \in R$ eine reguläre Folge und $y \in R$. Wir betrachten R als $R[[T]]$-Modul via den kanonischen

R-Algebrahomomorphismus $R[[T]] \longrightarrow R$, der T auf y abbildet. Nach einer bekannten Basiswechseleigenschaft der lokalen Kohomologie gilt dann

$$\begin{aligned} H^{t+1}_{(x_1,\ldots,x_t,y)}(R) &= H^{t+1}_{(x_1,\ldots,x_t,T)}(R) \\ &= H^{t+1}_{(x_1,\ldots,x_t,T)}(R[[T]]/(T-y)) \\ &= H^{t+1}_{(x_1,\ldots,x_t,T)}(R[[T]])/(T-y)H^{t+1}_{(x_1,\ldots,x_t,T)}(R[[T]]) \end{aligned}$$

Hierbei folgt die letzte Gleichheit, da $H^{t+1}_{(x_1,\ldots,x_t,T)}$ ein rechtsexakter Funktor ist, der mit direkten Summen vertauscht. Da $x_1,\ldots,x_t,T \in R[[T]]$ eine reguläre Folge und $R[[T]]$ ein lokaler kompletter Cohen-Macaulay-Ring ist, genügt es zum Beweis von Vermutung (*) im kompletten Fall, folgendes zu zeigen:
Sind $t \in \{2,3\}$, $x_1,\ldots,x_t \in R$ eine reguläre Folge und ist $y \in R$, so ist

$$Ass_R(H^t_{(x_1,\ldots,x_t)}(R)/yH^t_{(x_1,\ldots,x_t)}(R))$$

endlich.

Ein Beispiel für die in Bedingung b) von Satz 2.12 gegebene Situation ist das Ideal, das von den 2×2-Minoren einer Matrix $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}$ erzeugt wird, wobei $x_1,\ldots,x_6$ eine reguläre Folge im gegebenen Cohen-Macaulay-Ring sein soll. Dieses Ideal wird nämlich von drei Minoren erzeugt, von denen je zwei eine reguläre Folge bilden (dies wird in den Beweisen von 2.15 und 2.16 deutlich). In diesem Fall ist Bedingung b) erfüllt, wie die beiden nachfolgenden Sätze zeigen: Satz 2.15 behandelt den äquicharakteristischen und Satz 2.16 den gemischtcharakteristischen Fall.

2.15 Satz

a) Es seien k ein Körper, $R = k[[X_1,\ldots,X_6]]$ ein Potenzreihenring in sechs Variablen, $\Delta_1 := X_2X_6 - X_3X_5, \Delta_2 := X_1X_6 - X_3X_4, \Delta_3 := X_1X_5 - X_2X_4$ (das sind die 2×2-Minoren der Matrix $\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ X_4 & X_5 & X_6 \end{pmatrix}$). Ferner bezeichne I das Ideal $(\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3) \subseteq R$. Dann ist $Supp_R(H^3_I(R)) \subseteq \{(X_1,\ldots,X_6)\}$, insbesondere ist $Ass_R(H^3_I(R))$ endlich.

b) Es seien R ein lokaler äquicharakteristischer Cohen-Macaulay-Ring und $x_1,\ldots,x_6 \in R$ eine reguläre Folge. Setze $\delta_1 := x_2x_6 - x_3x_5, \delta_2 := x_1x_6 - x_3x_4, \delta_3 := x_1x_5 - x_2x_4$ (das sind die 2×2-Minoren der Matrix $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}$). Ferner bezeichne I das Ideal $(\delta_1,\delta_2,\delta_3) \subseteq R$. Dann ist $Ass_R(H^3_I(R))$ endlich.

Beweis:

a) Gemäß [Ei], Theorem 20.15.b. ist

$$0 \longrightarrow R^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ X_4 & X_5 & X_6 \end{pmatrix}} R^3 \xrightarrow{(\Delta_1, -\Delta_2, \Delta_3)} R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0$$

eine freie Auflösung von R/I. Nach der Formel von Auslander-Buchsbaum gilt also $depth(R/I) \geq 6 - 2 = 4$. Da offensichtlich $height(I) \geq 2$ ist, muß $dim(R/I) = 4 = depth(R/I)$ gelten; somit ist R/I Cohen-Macaulay. Insbesondere haben alle minimalen Primoberideale von I die Höhe zwei.
Aus [Ma], Theorem 30.4.(ii) ergibt sich unmittelbar

$$Sing(R/(\Delta_1)) \subseteq \{\mathfrak{p} \in Spec(R/(\Delta_1)) | \mathfrak{p} \supseteq (X_2, X_6, X_3, X_5)\}$$

Hierbei bezeichnet $Sing(R/(\Delta_1))$ die Menge aller Primideale $\mathfrak{p}$ von $R/(\Delta_1)$ mit der Eigenschaft, daß $(R/\Delta_1)_{\mathfrak{p}}$ nicht regulär ist. Analog gelten

$$Sing(R/(\Delta_2)) \subseteq \{\mathfrak{p} \in Spec(R/(\Delta_2)) | \mathfrak{p} \supseteq (X_1, X_6, X_3, X_4)\}$$

und

$$Sing(R/(\Delta_3)) \subseteq \{\mathfrak{p} \in Spec(R/(\Delta_3)) | \mathfrak{p} \supseteq (X_1, X_5, X_2, X_4)\}$$

Sei nun $\mathfrak{p} \in Spec(R/I) \setminus \{(X_1, \ldots, X_6)\}$ vorgegeben. Es ist $H^3_{IR_{\mathfrak{p}}}(R_{\mathfrak{p}}) = 0$ zu zeigen. Nach obigem existiert ein $i \in \{1, 2, 3\}$ mit $\mathfrak{p} \notin Sing(R/(\Delta_i))$. Insbesondere ist $(R/(\Delta_i))_{\mathfrak{p}}$ faktoriell.
Da außerdem alle minimalen Primoberideale von I die Höhe zwei haben, haben alle minimalen Primoberideale von $I/(\Delta_i)$ die Höhe eins; insbesondere ist das Ideal $IR_{\mathfrak{p}}/(\Delta_i)R_{\mathfrak{p}} \subseteq R_{\mathfrak{p}}/(\Delta_i)R_{\mathfrak{p}}$ bis aufs Radikal ein Hauptideal. Also gibt es ein $f \in R_{\mathfrak{p}}$ mit

$$\sqrt{IR_{\mathfrak{p}}/(\Delta_i)R_{\mathfrak{p}}} = \sqrt{((f) + (\Delta_i)R_{\mathfrak{p}})/(\Delta_i)R_{\mathfrak{p}}}$$

und folglich wird das Ideal $IR_{\mathfrak{p}}$ bis auf Radikal von zwei Elementen erzeugt. Somit ergibt sich $H^3_{IR_{\mathfrak{p}}}(R_{\mathfrak{p}}) = 0$, wie gewünscht.
b) Wir können o.E. R als komplett annehmen, denn: Die Voraussetzungen bleiben beim Übergang von R nach $\hat{R}$ erhalten und es gilt

$$Ass_{\hat{R}}(H^3_{I\hat{R}}(\hat{R})) = \bigcup_{\mathfrak{p} \in Ass_R(H^3_I(R))} Ass_{\hat{R}}(\hat{R}/\mathfrak{p}\hat{R})$$

nach [Ma], Theorem 23.2.(ii) (beachte, daß jedes $Ass_{\hat{R}}(\hat{R}/\mathfrak{p}\hat{R})$ ein $\mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{q} \cap R = \mathfrak{p}$ enthält, da $\hat{R}/R$ flach ist). Folglich gilt

$$|Ass_R(H^3_I(R))| \leq |Ass_{\hat{R}}(H^3_{I\hat{R}}(\hat{R}))|$$

Es seien $k \subseteq R$ ein Körper, $k[[X_1, \ldots, X_6]]$ ein Potenzreihenring in sechs Variablen und $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \in k[[X_1, \ldots, X_6]]$ (wie in a)) die 2×2-Minoren von $\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ X_4 & X_5 & X_6 \end{pmatrix}$. Bei dem (gemäß [Ma], Theorem 23.11) flachen k-Algebrahomomorphismus

$$k[[X_1, \ldots, X_6]] \xrightarrow{\varphi} R$$

mit $X_i \mapsto x_i$ $(i = 1, \ldots 6)$ wird jeweils Δ_j auf δ_j abgebildet $(j = 1, 2, 3)$. Also gilt

$$H^3_I(R) = H^3_{(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)}(R) = H^3_{(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)}(k[[X_1, \ldots, X_6]]) \otimes_{k[[X_1, \ldots, X_6]]} R$$

so daß wir aus [Ma], Theorem 23.2.(ii) und aus a) erhalten:

$$Ass_R(H^3_I(R)) \subseteq Ass_R(R/(X_1, \ldots, X_6)R)$$

Hieraus folgt die Behauptung.

2.16 Satz

a) Es seien p eine Primzahl, C ein kompletter p-Ring und $R = C[[X_1, \ldots, X_6]]$ ein Potenzreihenring über C in sechs Variablen, $\Delta_1 := X_2X_6 - X_3X_5, \Delta_2 := X_1X_6 - X_3X_4, \Delta_3 := X_1X_5 - X_2X_4$. Ferner bezeichne I das Ideal $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3) \subseteq R$. Dann ist $Supp_R(H^3_I(R)) \subseteq \mathcal{V}((X_1, \ldots, X_6))$ $(= \{(X_1, \ldots, X_6), (p, X_1, \ldots, X_6)\})$, insbesondere ist $Ass_R(H^3_I(R))$ endlich.

b) Es seien p eine Primzahl, $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Cohen-Macaulay-Ring mit $char(R) = 0$, $char(R/\mathfrak{m}) = p$ und $x_1, \ldots, x_6 \in R$ so, daß $p, x_1, \ldots, x_6$ eine R-reguläre Folge bilden. Setze $\delta_1 := x_2x_6 - x_3x_5, \delta_2 := x_1x_6 - x_3x_4, \delta_3 := x_1x_5 - x_2x_4$. Ferner bezeichne I das Ideal $(\delta_1, \delta_2, \delta_3) \subseteq R$. Dann ist $Ass_R(H^3_I(R))$ endlich.

Beweis:
a) Der Beweis geht analog zum Beweis von Satz 2.15 a).
b) Genauso wie im Beweis von Satz 2.15 b) können wir ohne Einschränkung annehmen, daß R komplett ist. Gemäß [Ma], Theorem 29.3 besitzt R einen kompletten Koeffizientenring $C \subseteq R$. Es seien $C[[X_1, \ldots, X_6]]$ ein Potenzreihenring über C in sechs Variablen und $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \in C[[X_1, \ldots, X_6]]$ (wie in a)) die 2×2-Minoren von $\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ X_4 & X_5 & X_6 \end{pmatrix}$.
Der Rest des Beweises verläuft nun analog zum Beweis von Satz 2.15 b), bis wir schließlich

$$Ass_R(H^3_I(R)) \subseteq Ass_R(R/(X_1, \ldots, X_6)R) \cup Ass_R(R/(p, X_1, \ldots, X_6)R)$$

erhalten.

Nach einem kürzlich von Anurag Singh gefundenen Beispiel (siehe [Si], ch. 4) ist die Vermutung (*) im nicht-lokalen Fall falsch. Aus Gründen der Vollständigkeit stellen wir dieses Beispiel mit einem übersichtlichen Beweis vor.

2.17 Satz

Es bezeichnen R den Cohen-Macaulay-Ring $\mathbf{Z}[U,V,W,X,Y,Z]/(UX+VY+WZ)$ und u,v,w,x,y,z die Restklassen von U,V,W,X,Y,Z in R. Ferner sei I das Ideal $(x,y,z) \subseteq R$. Dann ist $Ass_R(H_I^3(R))$ unendlich.

Beweis:
Es reicht zu zeigen, daß es zu jeder Primzahl p ein von Null verschiedenes $\eta \in H_I^3(R)$ mit $p \cdot \eta = 0$ gibt, denn dann gibt es zu jeder Primzahl p ein $\mathfrak{p} \in Ass_R(H_I^3(R)) \cap \mathcal{V}((p))$. Da jedes Primideal von R höchstens eine Primzahl als Element enthält, muß $Ass_R(H_I^3(R))$ dann unendlich sein.
Sei also p eine Primzahl. Wir schreiben $H_I^3(R)) = \varinjlim_{k \in \mathrm{N}} (R/(x^k, y^k, z^k))$. Da in R insbesondere $(ux+vy+wz)^p = 0$ gilt, gibt es ein $\lambda \in R$ mit

$$p \cdot \lambda = (ux)^p + (vy)^p + (wz)^p$$

λ ist durch diese Forderung eindeutig bestimmt. Sei η das Bild von $\lambda + (x^p, y^p, z^p)$ in $H_I^3(R)$. Dann gilt $p \cdot \eta = 0$ und es bleibt $\eta \neq 0$ zu zeigen: Dies bedeutet ausgeschrieben

$$\forall_{k \in \mathrm{N}} \lambda \cdot (xyz)^k \notin (x^{p+k}, y^{p+k}, z^{p+k})$$

Wir versehen den Ring $\mathbf{Z}[U,V,W,X,Y,Z]$ mit der N^4-Graduierung, bei der

$$\begin{array}{rr} deg(U) = (0,1,1,1) & deg(X) = (1,0,0,0) \\ deg(V) = (1,0,1,1) & deg(Y) = (0,1,0,0) \\ deg(W) = (1,1,0,1) & deg(Z) = (0,0,1,0) \end{array}$$

gelten. Dann ist $UX + VY + WZ$ ein homogenes Element (vom Grad $(1,1,1,1)$) von $\mathbf{Z}[U,V,W,X,Y,Z]$. Somit wird auf R eine N^4-Graduierung induziert.
Sei $k \in \mathrm{N}$. Da $\lambda \in R$ homogen ist (es ist nämlich $(ux)^p + (vy)^p + (wz)^p \in R$ homogen), gäbe es, falls

$$\lambda(xyz)^k \in (x^{p+k}, y^{p+k}, z^{pk})$$

wäre, homogene Elemente $c_1, c_2, c_3 \in R$ mit

$$\lambda(xyz)^k = c_1 x^{p+k} + c_2 y^{p+k} + c_3 z^{p+k}$$

und zwar mit

$$deg(c_1) = (0, p+k, p+k, p)$$
$$deg(c_2) = (p+k, 0, p+k, p)$$
$$deg(c_3) = (p+k, p+k, 0, p)$$

wie man mit Gradüberlegungen leicht nachrechnet.
Da $c_1 \in R$ homogen ist, kann man es als Restklasse eines homogenen Polynoms aus $\mathbf{Z}[U, V, W, X, Y, Z]$ darstellen. Da dieses homogene Polynom den Grad $(0, p+k, p+k, p)$ besitzt, kann nur das Monom $U^p Y^k Z^k$ darin "vorkommen" (d.h. einen Koeffizient ungleich Null haben). Somit ist $c_1 \in R$ ein Vielfaches von $u^p y^k z^k$. Analog ergibt sich, daß $c_2 \in R$ ein Vielfaches von $v^p z^k x^k$ und $c_3 \in R$ ein Vielfaches von $w^p x^k y^k$ sind. Somit gilt sogar

$$\begin{aligned} \lambda(xyz)^k &\in (u^p y^k z^k x^{p+k}, v^p z^k x^k y^{p+k}, w^p x^k y^k z^{p+k}) \\ &= (xyz)^k \cdot (u^p x^p, v^p y^p, w^p z^p) \end{aligned}$$

Da x, y und z jeweils Nichtnullteiler auf R sind, ist auch $(xyz)^k$ Nichtnullteiler auf R; also folgt

$$\lambda \in (u^p x^p, v^p y^p, w^p z^p)$$

Zum Beweis des Satzes reicht es also, $\lambda \notin (u^p x^p, v^p y^p, w^p z^p)$ zu zeigen. Wir zeigen sogar $\lambda \notin (p, u^p x^p, v^p y^p, w^p z^p) = (p, u^p x^p, v^p y^p)$ (die letzte Gleichheit folgt aus $0 = (ux + vy + wz)^p \equiv w^p z^p + u^p x^p + v^p y^p \mod p$): Dazu betrachten wir den Ringhomomorphismus

$$R = \mathbf{Z}[U, V, W, X, Y, Z]/(UX + VY + WZ) \longrightarrow \mathbf{Z}[X, Y]$$

mit $u \mapsto 1$, $v \mapsto 1$, $w \mapsto 1$, $x \mapsto X$, $y \mapsto Y$ und $z \mapsto -X-Y$. Wäre nun $\lambda \in (p, u^p x^p, v^p y^p)$, so wäre $\lambda_0 \in (p, X^p, Y^p) \subseteq \mathbf{Z}[X, Y]$, wobei $\lambda_0 \in \mathbf{Z}[X, Y]$ das eindeutig bestimmte Element aus $\mathbf{Z}[X, Y]$ mit $p \cdot \lambda_0 = X^p + Y^p + (-X-Y)^p$ bezeichnet. Der Koeffizient des Monoms $X^{p-1}Y$ in dem Polynom $X^p + Y^p + (-X-Y)^p$ ist jedoch $(-1)^p \cdot p$, also ist der Koeffizient des Monoms $X^{p-1}Y$ in dem Polynom λ_0 gleich $(-1)^p$, im Widerspruch zu $\lambda_0 \in (p, X^p, Y^p) \subseteq \mathbf{Z}[X, Y]$.

3. Zur kohomologischen Dimension von Idealen

In diesem Kapitel werden mehrere Abschätzungen für die kohomologische Dimension von Idealen bewiesen. Anschließend wird gezeigt, daß diese Abschätzungen "scharf" sind, das heißt ohne zusätzliche Voraussetzungen nicht verbessert werden können. Die Sätze dieses Kapitels behandeln den lokalen gemischtcharakteristischen Fall, nachdem der äquicharakteristische Fall bereits von Faltings untersucht wurde: In [Fa] wird eine Abschätzung der kohomologischen Dimension von Idealen im äquicharakteristischen Fall bewiesen und deren Schärfe gezeigt. Das Ergebnis von Faltings und die Abschätzungen dieser Arbeit sind fast gleich gut in dem Sinne, daß sie gegen fast die gleichen Zahlen abschätzen. Die Grundideen aller Aussagen dieses Kapitels entstammen [Fa], die technische Umsetzung hingegen verläuft anders.
Die Situation in diesem Kapitel wird meist sein: p ist eine Primzahl, $(A, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring mit $char(A) = 0$, $char(A/\mathfrak{m}) = p$, A ist unverzweigt (das heißt $p \notin \mathfrak{m}^2$), $I \subseteq A$ ein Ideal und M ein endlich erzeugter A-Modul. Es stellt sich heraus, daß zwei Fälle getrennt behandelt werden müssen: Der Fall, daß p in keinem minimalen Primoberideal von I enthalten ist, wird in den Sätzen 3.6 und 3.7 bzw. Korollar 3.8 betrachtet und der Fall $p \in \sqrt{I}$ in Satz 3.11. Ob sich eine (zu Korollar 3.8 bzw. Satz 3.11) ähnliche Abschätzung auch im allgemeinen Fall (p in manchen minimalen Primoberidealen von I enthalten, in manchen nicht) zeigen läßt, ist unklar.
Jedenfalls läßt sich in diesem allgemeinen Fall eine andere Aussage über das Verschwinden lokaler Kohomologie beweisen (Satz 3.4 und Satz 3.5).
Zuvor benötigen wir jedoch einige Lemmata und Definitionen.

3.1 Lemma

Es seien A ein noetherscher lokaler Ring, $I \subseteq J \subsetneq A$ Ideale, M ein endlich erzeugter A-Modul und $dim(M) \leq d-1$. Dann ist der kanonische Homomorphismus

$$H_J^{d-1}(M) \to H_I^{d-1}(M)$$

surjektiv.

Beweis:
Ohne Einschränkung können wir $J = (I, x)$ mit einem $x \in A$ annehmen. Wähle eine injektive Auflösung

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I^\bullet$$

des R-Moduls M. Es gibt kanonische Abbildungen $\Gamma_J(I^\bullet) \longrightarrow \Gamma_I(I^\bullet)$ und $\Gamma_I(I^\bullet) \longrightarrow \Gamma_I((I^\bullet)_x)$. Sei nun $l \in \mathbb{N}$ und es sei $I^l = \bigoplus_{k\in K} E_R(R/\mathfrak{p}_k)$ mit gewissen $\mathfrak{p}_k \in Spec(R)$, die nicht notwendig paarweise verschieden sind (hierbei bezeichnet $E_R(R/\mathfrak{p}_k)$ die injektive Hülle des R-Moduls $R/\mathfrak{p}_k$)). Dann ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow \Gamma_J(I^l) \longrightarrow \Gamma_I(I^l) \longrightarrow \Gamma_I(I^l_x) \longrightarrow 0$$

exakt, da

$$\Gamma_J(I^l) = \bigoplus_{\mathfrak{p}_k \supseteq J} E_R(R/\mathfrak{p}_k)$$

$$\Gamma_I(I^l) = \bigoplus_{\mathfrak{p}_k \supseteq I} E_R(R/\mathfrak{p}_k)$$

und

$$\Gamma_I(I^l_x) = \bigoplus_{\mathfrak{p}_k \supseteq I, x \notin \mathfrak{p}_k} E_R(R/\mathfrak{p}_k)$$

gelten. Aus der kurzen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \Gamma_J(I^\bullet) \longrightarrow \Gamma_I(I^\bullet) \longrightarrow \Gamma_I(I^\bullet_x) \longrightarrow 0$$

erhalten wir eine lange exakte Kohomologiesequenz

$$\begin{gathered} 0 \to \Gamma_J(M) \to \Gamma_I(M) \to \Gamma_I(M_x) \to \dots \\ \dots \to H^{d-1}_J(M) \to H^{d-1}_I(M) \to H^{d-1}_I(M_x) \to \dots \end{gathered}$$

Wegen $dim(M_x) < dim(M) \leq d-1$ (o.E. $M \neq 0$) ist $H^{d-1}_I(M_x) = 0$ und die Behauptung folgt.

3.2 Definition:

Es seien A ein noetherscher lokaler Ring und $I \subsetneq A$ ein Ideal. Dann setzen wir

$$c(I) := edim(A) - min\{dim(A/\mathfrak{p}) | \mathfrak{p} \text{ minimales Primoberideal von } I\}$$

Im regulären Fall identifiziert sich die (etwas unmotiviert erscheinende) Größe $c(I)$ mit dem Maximum der Höhen der minimalen Primoberideale von I (dies wird bereits in [Fa] erwähnt):

3.3 Lemma

Sind R ein regulärer lokaler Ring und $I \subsetneq R$ ein Ideal, so gilt

$$c(I\hat{R}) = beight(I) \quad (:= max\{height(\mathfrak{p})|\mathfrak{p} \text{ minimales Primoberideal von } I\})$$

Beweis:
Es ist $edim(\hat{R}) = dim(R)$ und für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subseteq R$ gilt $height(\mathfrak{p}) + dim(R/\mathfrak{p}) = dim(R)$ (da R ein lokaler Cohen-Macaulay-Ring ist). Also ist nur noch

$$min\{dim(\hat{R}/\mathfrak{p})|\mathfrak{p} \text{ minimales Primoberideal von } I\hat{R}\}$$

$$= min\{dim(R/\mathfrak{p})|\mathfrak{p} \text{ minimales Primoberideal von } I\}$$

zu zeigen: Sei hierzu zunächst ein minimales Primoberideal $\mathfrak{p}$ von I vorgegeben und $\mathfrak{q}$ ein minimales Primoberideal von $\mathfrak{p}\hat{R}$. Es gilt

$$dim(\hat{R}/\mathfrak{q}) \leq dim(\hat{R}/\mathfrak{p}\hat{R}) = dim(R/\mathfrak{p})$$

Going-down für die Algebra $\hat{R}/R$ liefert $\mathfrak{q} \cap R = \mathfrak{p}$. Hieraus folgt, daß $\mathfrak{q}$ minimales Primoberideal von $I\hat{R}$ ist (wäre $\mathfrak{q}' \subseteq \hat{R}$ ein Primideal mit $I\hat{R} \subseteq \mathfrak{q}' \subsetneq \mathfrak{q}$, so wäre notwendig $\mathfrak{q}' \cap R = \mathfrak{p}$, also $\mathfrak{p}\hat{R} \subseteq \mathfrak{q}' \subsetneq \mathfrak{q}$ im Widerspruch zur Wahl von $\mathfrak{q}$). Somit ist

$$min\{dim(\hat{R}/\mathfrak{p})|\mathfrak{p} \text{ minimales Primoberideal von } I\hat{R}\}$$

$$\leq min\{dim(R/\mathfrak{p})|\mathfrak{p} \text{ minimales Primoberideal von } I\}$$

gezeigt. Sei nun andererseits ein minimales Primoberideal $\mathfrak{q}$ von $I\hat{R}$ vorgegeben. Wiederum wegen going-down ist $\mathfrak{q} \cap R$ minimales Primoberideal von I.
$R/\mathfrak{q} \cap R$ ist ein noetherscher lokaler integrer Ring und außerdem ein universeller Kettenring. Gemäß [Ma], Theorem 31.7 ist $\hat{R}/(\mathfrak{q} \cap R)\hat{R}$ also äquidimensional. Als minimales Primoberideal von $I\hat{R}$ ist $\mathfrak{q}$ auch ein minimales Primideal von $\hat{R}/(\mathfrak{q} \cap R)\hat{R}$. Folglich gilt

$$dim(\hat{R}/\mathfrak{q}) = dim(\hat{R}/(\mathfrak{q} \cap R)\hat{R}) = dim(R/\mathfrak{q} \cap R)$$

Damit ist auch die Ungleichung

$$min\{dim(\hat{R}/\mathfrak{p})|\mathfrak{p} \text{ minimales Primoberideal von } I\hat{R}\}$$

$$\geq min\{dim(R/\mathfrak{p})|\mathfrak{p} \text{ minimales Primoberideal von } I\}$$

bewiesen und die Behauptung folgt.

Wir kommen nun zu eingangs erwähntem allgemeingültigem (das heißt in diesem Fall: Vom Verhältnis von I und p zueinander unabhängigen) Verschwindungssatz. Im Beweis hat Satz 1.13 zentrale Bedeutung.

3.4 Satz

Es seien p eine Primzahl, $(A, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring, M ein endlich erzeugter A-Modul und $I \subsetneq A$ ein Ideal. Es gelte $char(A) = 0$, $char(A/\mathfrak{m}) = p$ und A sei unverzweigt (d.h. $p \notin \mathfrak{m}^2$). Für ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m > c(I\hat{A}) =: c$ gelte:
(*) Für jedes $s \in \{1, \ldots, c-1\}$ und jedes $\mathfrak{p} \in Spec(A)$ mit $dim(A/\mathfrak{p}) > s$ und jedes $q \geq m - s$ ist $H_I^q(M)_\mathfrak{p} = 0$.
Dann ist $H_I^q(M) = 0$ für alle $q \geq m + 1$.

Beweis:
Zunächst können wir durch Übergang von A zu $\hat{A}$ o.E. annehmen, daß A komplett ist: Beachte dabei, daß $\hat{A}/A$ treuflach ist und daß für jedes $\mathfrak{p} \in Spec(\hat{A})$

$$dim(A/(\mathfrak{p} \cap A)) = dim(\hat{A}/(\mathfrak{p} \cap A)\hat{A}) \geq dim(\hat{A}/\mathfrak{p})$$

gilt. Nun ist A homomorphes Bild eines regulären unverzweigten Rings derselben Einbettungsdimension wie A (folgt aus dem Beweis zu [Ma], Theorem 29.4). Durch Übergang zu diesem Ring können wir offenbar annehmen, daß A regulär, also von der Form $C[[X_1, \ldots, X_n]]$ mit einem kompletten p-Ring C ist (hier werden die Bezeichnungen aus [Ma], §29 verwendet), wobei $n = edim(A) - 1$. Wegen Satz 1.13 können wir außerdem ohne Einschränkung annehmen, daß M von der Form $A/\mathfrak{q}$ mit einem $\mathfrak{q} \in Spec(A)$ ist.
1. Fall: $p \in \mathfrak{q}$:
In diesem Fall brauchen wir nur [Fa], Satz 1 auf den Ring $A/(p)$ anzuwenden und erhalten sogar die schärfere Aussage $H_I^q(A/\mathfrak{q}) = 0$ für jedes $q \geq m$.
2. Fall: $p \notin \mathfrak{q}$:
Aus der kurzen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow A/\mathfrak{q} \xrightarrow{p} A/\mathfrak{q} \longrightarrow A/(\mathfrak{q}, p) \longrightarrow 0$$

erhalten wir für $q \geq 1$ eine exakte Sequenz

$$H_I^{q-1}(A/(\mathfrak{q}, p)) \longrightarrow H_I^q(A/\mathfrak{q}) \xrightarrow{p} H_I^q(A/\mathfrak{q}) \longrightarrow H_I^q(A/(\mathfrak{q}, p))$$

bei der für $q \geq m+1$ wegen des verschärften Ergebnisses im 1. Fall und wegen Satz 1.13 die beiden äußeren Terme verschwinden. Somit ist für $q \geq m+1$ die Multiplikation mit p bijektiv auf $H_I^q(A/\mathfrak{q})$, d.h. $H_I^q(A/\mathfrak{q})$ ist kanonisch ein A_p-Modul. Hierbei bezeichnet A_p die Lokalisation des Ringes A in der Nennermenge $\{1, p, p^2, \ldots\}$. Wegen des Lokal-Global-Prinzips reicht es zu zeigen, daß für beliebiges $\mathfrak{p} \in Spec(A_p) = Spec(A) \setminus \mathcal{V}((p))$ und $q \geq m+1$

$$0 = (H_I^q(A/\mathfrak{q}))_\mathfrak{p} = H_{IA_\mathfrak{p}}^q(A_\mathfrak{p}/\mathfrak{q}A_\mathfrak{p}))$$

gilt. Wegen $p \notin \mathfrak{p}$ ist $A_\mathfrak{p}$ ein noetherscher lokaler gleichcharakteristischer Ring, d.h. wir können Satz 1 aus [Fa] auf den Ring $A_\mathfrak{p}$ anwenden. Beachte dabei, daß aus Lemma 3.3 die Ungleichung $c(I(\widehat{A_\mathfrak{p}})) \leq c < m$ folgt. Verwende außerdem, daß die Voraussetzung (*) von Satz 3.4 wegen Satz 1.13 auch für $A/\mathfrak{q}$ anstelle von M gegeben ist. Es ergibt sich, daß alle Voraussetzungen von [Fa], Satz 1 für den Ring $A_\mathfrak{p}$ und den $A_\mathfrak{p}$-Modul $A_\mathfrak{p}/\mathfrak{q}A_\mathfrak{p}$ erfüllt sind; es folgt also $H_{IA_\mathfrak{p}}^q(A_\mathfrak{p}/\mathfrak{q}A_\mathfrak{p}) = 0$ sogar für alle $q \geq m$.

Die Aussage von Satz 3.4 bleibt unter leicht verschärften Voraussetzungen auch dann gültig, wenn man die Voraussetzung der Unverzweigtheit entfernt. Dies ist der Inhalt des folgenden Satzes. Sein Beweis geschieht durch Rückführung auf Satz 3.4.

3.5 Satz

Es seien p eine Primzahl, $(A, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring, M ein endlich erzeugter A-Modul und $I \subsetneq A$ ein Ideal. Es gelte $char(A) = 0$, $char(A/\mathfrak{m}) = p$ und $c := c(I\hat{A})$. Für ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m > c+1$ gelte:
(*) Für jedes $s \in \{1, \ldots, c(I\hat{A})\}$ und jedes $\mathfrak{p} \in Spec(A)$ mit $dim(A/\mathfrak{p}) > s$ und jedes $q \geq m-s$ ist $H_I^q(M)_\mathfrak{p} = 0$.
Dann ist $H_I^q(M) = 0$ für alle $q \geq m+1$.

Beweis:
Ohne Einschränkung sei A komplett: Beachte dabei, daß $\hat{A}/A$ treuflach ist und für $\mathfrak{p} \in Spec(\hat{A})$ stets $dim(A/\mathfrak{p} \cap A) = dim(\hat{A}/(\mathfrak{p} \cap A)\hat{A}) \geq dim(\hat{A}/\mathfrak{p})$ gilt.
Nach einem Cohenschen Struktursatz ist A Quotient eines regulären lokalen unverzweigten kompletten Rings A', dessen Einbettungsdimension um höchstens eins größer als die von A ist (vgl. etwa Beweis von [Ma], Theorem 29.4.). Bezeichnet I' das Urbild von I in A', so gilt $c(I') \leq c(I) + 1$. Folglich ist die Bedingung $m > c(I')$ erfüllt. Wählt man ein beliebiges $s \in \{1, \ldots, c(I')-1\}$, so ist $s \in \{1, \ldots, c(I)\}$ und also gilt für jedes $\mathfrak{p} \in Spec(A')$ mit $dim(A'/\mathfrak{p}) > s$ und jedes $q \geq m-s$ gemäß (*) $H_{I'}^q(M)_\mathfrak{p} = H_I^q(M)_\mathfrak{p} = 0$ (hier kann man ohne Einschränkung $\mathfrak{p} \in Supp_{A'}(A)$ annehmen, denn andernfalls ist sogar $M_\mathfrak{p} = 0$).

Somit können wir Satz 3.4 auf den Ring A' anwenden und erhalten $0 = H^q_{I'}(M) = H^q_I(M)$ für alle $q \geq m + 1$.

Der folgende Satz stellt das Analogon zu [Fa], Satz 1 im gemischtcharakteristischen Fall dar. Da der Originalbeweis von Faltings hier nicht funktioniert, sind einige andere Techniken erforderlich.

3.6 Satz

Es seien p eine Primzahl, $(A, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring, M ein endlich erzeugter A-Modul und $I \subsetneq A$ ein Ideal. Es gelte $char(A) = 0$, $char(A/\mathfrak{m}) = p$ und A sei unverzweigt (d.h. $p \notin \mathfrak{m}^2$). Ferner sei p in keinem minimalen Primoberideal von I enthalten und es sei $m \in \mathbb{N}$ mit $m > c(I\hat{A}) =: c$ und
(*) Für jedes $s \in \{1, \ldots, c-1\}$ und jedes $\mathfrak{p} \in Spec(A)$ mit $dim(A/\mathfrak{p}) > s$ und jedes $q \geq m - s$ ist $H^q_I(M)_\mathfrak{p} = 0$.
Dann ist $H^q_I(M) = 0$ für alle $q \geq m$.

Beweis:
Wir können davon ausgehen, daß p in keinem assoziierten Primideal von A/I enthalten ist: Dazu gehen wir von I nach $\sqrt{I}$ über; beachte dabei: Wegen $I\hat{A} \subseteq \sqrt{I}\hat{A} \subseteq \sqrt{I\hat{A}}$ gilt $c(I\hat{A}) = c(\sqrt{I}\hat{A})$.
Der Beweis wird nun durch Induktion nach $dim(M)$ geführt:
$dim(M) = 0$: Wegen $m > c \geq 0$ ist die Behauptung klar.
$dim(M) > 0$:
a) Wir zeigen zunächst, daß wir ohne Einschränkung annehmen dürfen, daß A komplett ist:
Dazu gehen wir zu $\hat{A}$, $I\hat{A}$ und $\hat{M}$ über und zeigen, daß alle Voraussetzungen des Satzes erfüllt bleiben (beachte $dim(\hat{M}) = dim(M)$): Nach Voraussetzung operiert p injektiv auf A/I; also ist p auch injektiv auf $\hat{A}/I\hat{A}$, das heißt, p ist in keinem assozierten Primideal von $\hat{A}/I\hat{A}$ enthalten. Zum Nachweis von (*) seien $s \in \{1, \ldots, c-1\}$, $\mathfrak{P} \in Spec(\hat{A})$ mit $dim(\hat{A}/\mathfrak{P}) > s$ und $q \geq m - s$ vorgegeben.
Dann ist $dim(A/\mathfrak{P} \cap A) = dim(\hat{A}/(\mathfrak{P} \cap A)\hat{A}) \geq dim(\hat{A}/\mathfrak{P}) > s$, folglich gilt $H^q_I(M) \otimes_A A_{\mathfrak{P} \cap A} = 0$ und somit ist auch $H^q_I(M) \otimes_A \hat{A}_\mathfrak{P} = 0$.
Ist der Satz also im kompletten Fall gezeigt, so folgt die Behauptung auch allgemein wegen der Treuflachheit von $\hat{A}/A$.
b) Wir können zusätzlich A als regulär annehmen: Nach dem Beweis zu [Ma], Theorem 29.4. können wir A als Quotient eines Rings schreiben, der ein Potenzreihenring

$C[[X_1,\ldots,X_n]]$ über einem kompletten p-Ring C ist und die gleiche Einbettungsdimension wie A hat. Offenbar reicht es nun, die Behauptung für diesen Ring $C[[X_1,\ldots,X_n]]$ (und das Urbild von I in diesem Ring) zu zeigen.
c) Wir können ohne Einschränkung $Supp_A(H_I^q(M)) \subseteq \{\mathfrak{m}\}$ für $q \geq m$ annehmen:
Sei dazu $\mathfrak{q} \in Spec(A) \setminus \{\mathfrak{m}\}$. Zu zeigen ist $H^q_{IA_\mathfrak{q}}(M_\mathfrak{q}) = 0$ für $q \geq m$.
1. Fall: $p \notin \mathfrak{q}$.
Es gilt $char(A_\mathfrak{q}) = 0$; zur Bestimmung von $char(A_\mathfrak{q}/\mathfrak{q}A\mathfrak{q})$ nehmen wir an, es gäbe eine Primzahl t mit $t \cdot 1 = 0$ in $A_\mathfrak{q}/\mathfrak{q}A_\mathfrak{q}$. Dann ist $t \cdot 1 = 0$ auch in $A/\mathfrak{q}$ und somit $t \in \mathfrak{q} \cap \mathbb{Z} \subseteq \mathfrak{m} \cap \mathbb{Z} = (p)$; es ergäbe sich ein Widerspruch zu $p \notin \mathfrak{q}$. Folglich muß $char(A_\mathfrak{q}/\mathfrak{q}A_\mathfrak{q}) = 0$ sein; $A_\mathfrak{q}$ ist also ein gleichcharakteristischer lokaler Ring. Wendet man den Satz von Faltings unter Verwendung von Lemma 3.3 auf $A_\mathfrak{q}$, $IA_\mathfrak{q}$ und $M_\mathfrak{q}$ an, so erhält man $H^q_{IA_\mathfrak{q}}(M_\mathfrak{q}) = 0$, wie gewünscht.
2. Fall: $p \in \mathfrak{q}$.
Die Induktionsvoraussetzungen für den Ring $A_\mathfrak{q}$ sind erfüllt: Es sind $char(A_\mathfrak{q}) = 0$ und $char(A_\mathfrak{q}/\mathfrak{q}A_\mathfrak{q}) = p$, d.h. $A_\mathfrak{q}$ ist ein gemischtcharakteristischer lokaler Ring.
Behauptung: $A_\mathfrak{q}$ ist unverzweigt.
Setze dazu $h := dim(A_\mathfrak{q})$. Da A unverzweigt ist, sind A/p und damit auch $(A/p)_\mathfrak{q} = A_\mathfrak{q}/pA_\mathfrak{q}$ regulär. Die Dimension von $A_\mathfrak{q}/pA_\mathfrak{q}$ ist offenbar $h-1$. Das heißt, daß $\mathfrak{q}A_\mathfrak{q}/pA_\mathfrak{q}$ von $h-1$ Elementen erzeugt wird. Folglich läßt sich p zu einem regulären Parametersystem von $A_\mathfrak{q}$ ergänzen, was zur Behauptung äquivalent ist.
Da außerdem $dim_{A_\mathfrak{q}}(M_\mathfrak{q}) < dim_A(M)$ ist, können wir die Induktionsvoraussetzung unter Verwendung von Lemma 3.3 auf $A_\mathfrak{q}$, $IA_\mathfrak{q}$ und $M_\mathfrak{q}$ anwenden und erhalten $H^q_{IA_\mathfrak{q}}(M_\mathfrak{q}) = 0$ für $q \geq m$.
d) Mittels absteigender Induktion nach m können wir davon ausgehen, daß $H^q_I(M) = 0$ für $q > m$ ist (für "größere" m ist (*) erst recht erfüllt).
e) Lemma 3.3 läßt sich auf den regulären Ring $A = C[[X_1,\ldots,X_n]]$ anwenden und liefert $c = height(I)$. Wir definieren das Ideal $(A/I) \otimes_C \mathfrak{m} := (\{a \otimes m | a \in A/I, m \in \mathfrak{m}\}) \subseteq (A/I) \otimes_C A$. B bezeichne die $(A/I) \otimes_C \mathfrak{m}$-adische Komplettierung von $(A/I) \otimes_C A$.
Durch Angabe zweier zueinander inverser Abbildungen zeigt man leicht

$$B = (A/I)[[T_1,\ldots,T_n]]$$

Wegen der Komplettheit von A/I induziert die Multiplikation

$$(A/I) \otimes_C A \to A/I$$

einen Ringhomomorphismus

$$B \xrightarrow{\mu} A/I$$

Da sich μ mit dem A/I-Algebrenhomomorphismus

$$\begin{aligned}(A/I)[[T_1,\dots,T_n]] &\to A/I\\ T_i &\mapsto X_i + I\end{aligned}$$

identifiziert, ist $J := ker(\mu) = (\overline{X_1}\otimes 1 - 1\otimes X_1,\dots,\overline{X_n}\otimes 1 - 1\otimes X_n)$; insbesondere wird J von n Elementen erzeugt.
Da nach Voraussetzung p in keinem assoziierten Primideal von A/I enthalten ist, ist A/I als C-Modul torsionsfrei, folglich $Tor_1^C(C/p^lC, A/I) = 0$ für jedes $l \in \mathbb{N}$ und also A/I flach über C. Mit dem lokalen Flachheitskriterium (siehe etwa [Ma], Theorem 22.3) ergibt sich die Flachheit von B/A; hierbei ist die Algebra

$$\begin{aligned}A = C[[X_1,\dots,X_n]] &\longrightarrow (A/I)[[T_1,\dots,T_n]] = B\\ C \ni c &\mapsto c + I \in C[[X_1,\dots,X_n]]/I = A/I\\ X_i &\mapsto T_i\end{aligned}$$

gemeint.
f) Sei N ein B-Modul. Dann gibt es gemäß Satz 1.15 eine Spektralsequenz

$$E_2^{p,q} := H_J^p(H_{IB}^q(N)) \Rightarrow H_J^{p+q}(N)$$

für zusammengesetzte Funktoren.
g) Es ist $H_J^{d-1}(B\otimes_A H_I^m(M)) = 0$: Dazu wenden wir f) auf den B-Modul $B\otimes_A M$ an. Wegen der Flachheit von B/A ist dann

$$E_2^{p,q} = H_J^p(B\otimes_A H_I^q(M))$$

Bezeichnet $d := dim(A/I)$, so ist wegen

$$d - 1 + m \geq d - 1 + c + 1 = d + c \geq dim(A) = n + 1 > n \geq \mu(J)$$

$$H_J^{d-1+m} = 0$$

Erst recht ist

(1) $$E_\infty^{d-1,m} = 0$$

Sei $r \geq 2$ vorgegeben. Betrachte die Differentiale

(2) $$E_r^{d-1-r,m-1+r} \to E_r^{d-1,m} \to E_r^{d-1+r,m+1-r}$$

obiger Spektralsequenz. Wegen $m-1+r > m$ ist sicherlich $H_I^{m-1+r}(M) = 0$ (vergleiche d)), also auch

$$E_r^{d-1-r,m-1+r} = 0$$

Behauptung: $E_r^{d-1+r,m+1-r} = 0$.
Dazu zeigen wir $H_J^{d-1+r}(B \otimes_A H_I^{m-r+1}(M)) = 0$:
1. Fall: $r > c$.
Dann ist

$$d-1+r > d-1+c \geq dim(A)-1 = n+1-1 = n \geq \mu(J)$$

und die Behauptung ist klar.
2. Fall: $r \leq c$.
Setze

$$s := r-1 \ (\in \{1, \ldots, c-1\})$$

Wegen (*) ist $dim(Supp_A(H_I^{m-s}(M))) \leq s$. Unter Verwendung von going-down für die flache Algebra B/A erhält man sofort

$$\begin{aligned} dim(Supp_B(B \otimes_A H_I^{m-s}(M)) &\leq s + (dim(B) - dim(A)) \\ &= s + ((d+n) - (n+1)) \\ &= d+s-1 \\ &< d-1+r \end{aligned}$$

Da die lokale Kohomologie mit direktem Limes vertauscht, ergibt sich hieraus

$$H_J^{d-1+r}(B \otimes_A H_I^{m-r+1}(M)) = 0$$

(schreibe hierzu $B \otimes_A H_I^{m-r+1}(M)$ als Vereinigung endlich erzeugter Untermoduln). Somit ist die Behauptung gezeigt. Aus (1) und (2) ergibt sich unmittelbar

$$H_J^{d-1}(B \otimes_A H_I^m(M)) = 0$$

was zu zeigen war.
h) Es ist $d = dim(A/I) > 0$, sonst wäre p in einem assoziierten Primideal von A/I enthalten. Seien $a_1, \ldots, a_{d-1} \in A$ so, daß $p, a_1 + I, \ldots, a_{d-1} + I$ ein Parametersystem von A/I bilden (beachte: p ist in keinem minimalen Primoberideal von I enthalten). Setze $\mathfrak{a} := (a_1, \ldots, a_{d-1}, I)$. Sei weiterhin $\{L_\alpha\}$ die Menge der endlich erzeugten A-Untermoduln von $H_I^m(M)$. Dann ist

$$0 = H_J^{d-1}(B \otimes_A \varinjlim_\alpha L_\alpha) = \varinjlim_\alpha H_J^{d-1}(B \otimes_A L_\alpha)$$

Fixiere ein α. Wegen c) ist $dim(Supp_A(L_\alpha)) \subseteq \{\mathfrak{m}\}$. Daraus können wir

$$dim_B(B \otimes_A L_\alpha) = dim(Supp_B(B \otimes_A L_\alpha) \leq d-1 \tag{3}$$

folgern (diese Art von Folgerung wurde weiter oben schon verwendet). Als nulldimensionaler endlich erzeugter Modul wird L_α von einer Potenz von $\mathfrak{m}$ annulliert. Sei etwa $\mathfrak{m}^\mu \cdot L_\alpha = 0$. Dann ist auch $\mathfrak{a}^\mu \cdot L_\alpha = 0$.
Da L_α von einer Potenz von $\mathfrak{m}$ annulliert wird, gilt

$$(A/I) \otimes_C L_\alpha = ((A/I) \otimes_C L_\alpha)\widehat{\ } = B \otimes_A L_\alpha$$

wobei $\hat{}$ wieder die $(A/I) \otimes_C \mathfrak{m}$-adische Komplettierung bezeichnet und dieser Modul ist auch ein $((A/I) \otimes_C (A/\mathfrak{a}^\mu))\widehat{\ } =: D$ -Modul.
Wir erhalten Ringhomomorphismen $B \xrightarrow{f} D$ und $A/I \xrightarrow{g} D$ auf die folgende Weise:

$$B \to B \otimes_A (A/\mathfrak{a}^\mu) = ((A/I) \otimes_C (A/\mathfrak{a}^\mu))\widehat{\ } = D$$

$$A/I \to (A/I) \otimes_C (A/\mathfrak{a}^\mu) \to ((A/I) \otimes_C (A/\mathfrak{a}^\mu))\widehat{\ } = D$$

Behauptung: Es ist $g((\mathfrak{a}/I)^\mu)D \subseteq f(J)D$.
Betrachte dazu das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
B \otimes_A (A/\mathfrak{a}^\mu) & & ((A/I) \otimes_C (A/\mathfrak{a}^\mu))\widehat{\ } \\
 & & \beta \\
B \otimes_A (A/\mathfrak{a}^\mu)/J(B \otimes_A (A/\mathfrak{a}^\mu)) & (B/J) \otimes_A (A/\mathfrak{a}^\mu) & (A/I) \otimes_A (A/\mathfrak{a}^\mu)
\end{array}$$

Aus der Kommutativität ergibt sich

$$g((\mathfrak{a}/I)^\mu)D \subseteq ker(\beta) = f(J)D$$

Also gibt es einen kanonischen Homomorphismus

$$H^{d-1}_{f(J)D}((A/I) \otimes_C L_\alpha) \to H^{d-1}_{g((\mathfrak{a}/I)^\mu)D}((A/I) \otimes_C L_\alpha)$$

Dieser ist gemäß Lemma 3.1 surjektiv (beachte: wegen (3) ist $dim_D((A/I) \otimes_C L_\alpha) = dim_B(B \otimes_A L_\alpha) \leq d-1$).
Wegen

$$\varinjlim_\alpha H^{d-1}_{f(J)D}(B \otimes_A L_\alpha) = 0$$

und der Exaktheit des direkten Limes gilt also auch

$$\begin{aligned} 0 &= \varinjlim_{\alpha} H^{d-1}_{g((\mathfrak{a}/I)^{\mu})D}((A/I) \otimes_C L_\alpha) \\ &= H^{d-1}_{g((\mathfrak{a}/I)^{\mu})D}((A/I) \otimes_C H^m_I(M)) \\ &= H^{d-1}_{\mathfrak{a}/I}((A/I) \otimes_C H^m_I(M)) \end{aligned}$$

j) Es ist $H^l_{\mathfrak{a}/I} = 0$ für alle $l \geq d$; somit ist $H^{d-1}_{\mathfrak{a}/I}$ ein additiver, rechtsexakter Funktor und es gilt

$$\begin{aligned} 0 &= H^{d-1}_{\mathfrak{a}/I}((A/I) \otimes_C H^m_I(M)) \\ &= H^{d-1}_{\mathfrak{a}/I}(A/I) \otimes_{A/I} ((A/I) \otimes_C H^m_I(M)) \\ &= H^{d-1}_{\mathfrak{a}/I}(A/I) \otimes_C H^m_I(M) \end{aligned}$$

k) Aus j) folgt die Behauptung $H^m_I(M) = 0$:
Betrachte dazu den kanonischen Homomorphismus

$$H^{d-1}_{\mathfrak{a}/I}(A/I) \xrightarrow{\alpha} H^{d-1}_{\mathfrak{a}/I}((A/I) \otimes_C Q(C))$$

Setze $E := im(\alpha)$. Aus der Surjektivität von

$$H^{d-1}_{\mathfrak{a}/I}(A/I) \otimes_C H^m_I(M) \xrightarrow{\alpha \otimes id} E \otimes_C H^m_I(M)$$

und aus j) folgt

$$E \otimes_C H^m_I(M) = 0$$

Als Untermodul eines $Q(C)$-Moduls ist E ein torsionsfreier C-Modul und also flach über C (ein ähnlicher Schluß wurde weiter oben schon verwendet). Es reicht nun, zu zeigen: E ist als C-Modul sogar treuflach, d.h. $E \neq pE$:
Annahme: $E = pE$.
Dann wäre E ein $Q(C)$-Vektorraum und α notwendig surjektiv. Die exakte Sequenz (minimale injektive Auflösung des lokalen Gorenstein-Rings C)

$$0 \to C \to Q(C) \to H^1_{pC}(C) \to 0$$

induziert wegen der Flachheit von A/I über C eine lange exakte Kohomologiesequenz (Ausschnitt)

$$H^{d-1}_{\mathfrak{a}/I}(A/I) \xrightarrow{\alpha} H^{d-1}_{\mathfrak{a}/I}((A/I) \otimes_C Q(C)) \to H^{d-1}_{\mathfrak{a}/I}((A/I) \otimes_C H^1_{pC}(C)) \to 0$$

Also ist

$$\begin{aligned} 0 &= H^{d-1}_{\mathfrak{a}/I}((A/I) \otimes_C H^1_{pC}(C)) \\ &\overset{(A/I)/C \text{ flach}}{=} H^{d-1}_{\mathfrak{a}/I}(H^1_{p(A/I)}(A/I)) \\ &= H^d_{\mathfrak{m}}(A/I) \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit unmittelbar aus der gemäß Satz 1.15 zu $\Gamma_{\mathfrak{a}/I} \circ \Gamma_{p(A/I)} = \Gamma_{\mathfrak{m}}$ gehörenden Spektralsequenz folgt. Da bekanntlich $H^d_{\mathfrak{a}/I}(A/I) \neq 0$ gilt, liegt ein Widerspruch vor, d.h. E ist treuflach, was noch zu zeigen war.

Genauso wie sich Satz 3.4 auf nicht notwendig unverzweigte gemischtcharakteristische lokale Ringe anwenden ließ (siehe Satz 3.5), läßt sich auch Satz 3.6 verwenden, um die Bedingung der Unverzweigtheit zu eliminieren. Der folgende Satz verhält sich also zu Satz 3.6 wie Satz 3.5 zu Satz 3.4.

3.7 Satz

Es seien p eine Primzahl, $(A, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring, M ein endlich erzeugter A-Modul und $I \subsetneq A$ ein Ideal. Es gelte $char(A) = 0$ und $char(A/\mathfrak{m}) = p$. Ferner sei p in keinem minimalen Primoberideal von I enthalten und es sei $m \in \mathbb{N}$ mit $m > c(I\hat{A}) + 1$ und
(*) Für jedes $s \in \{1, \ldots, c(I\hat{A})\}$ und jedes $\mathfrak{p} \in Spec(A)$ mit $dim(A/\mathfrak{p}) > s$ und jedes $q \geq m - s$ ist $H^q_I(M)_{\mathfrak{p}} = 0$.
Dann ist $H^q_I(M) = 0$ für alle $q \geq m$.

Beweis:
Der Beweis von Satz 3.7 ist analog zum Beweis von Satz 3.5. Beachte dabei: Die Bedingung, daß p in keinem minimalen Primoberideal von I enthalten ist, bleibt beim Übergang von A zum Ring A' erhalten.

Aus Satz 3.6 und [Fa], Korollar 2 läßt sich induktiv eine Abschätzung für die kohomologische Dimension von Idealen in gemischter Charakteristik zeigen. Diese ist genauso gut wie die aus [Fa], Korollar 2.

3.8 Korollar

Es seien $(A, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring der Charakteristik Null, $char(A/\mathfrak{m}) = p$ prim, M ein endlich erzeugter d-dimensionaler A-Modul, A unverzweigt, $I \subsetneq A$ ein Ideal, p in keinem minimalen Primoberideal von I enthalten und $c := c(I\hat{A}) > 0$.

Dann ist $H_I^q(M) = 0$ für jedes $q \geq d + 1 - [(d-1)/c]$, wobei $[\ldots]$ die Gauß-Klammer bezeichnet. Insbesondere gilt

$$cd(I) \leq dim(A) - [(dim(A) - 1)/c]$$

Beweis:
Genauso wie im Beweis von Satz 3.6 können wir davon ausgehen, daß p in keinem assoziierten Primideal von A/I enthalten ist.
Induktion nach d:
$d < c$: Dann ist

$$d + 1 - [(d-1)/c] \geq d + 1$$

und die Behauptung wahr.
$d \geq c$:
Ähnlich wie im Beweis von Satz 3.6 können wir ohne Einschränkung $A = C[[X_1, \ldots, X_n]]$ mit einem kompletten p-Ring C annehmen.
Da $t \mapsto t + 1 - [(t-1)/c]$ monoton steigend ist, ergibt sich

$$c < c + 1 = c + 1 - [(c-1)/c] \leq d + 1 - [(d-1)/c] =: m$$

Mit diesem m wollen wir Satz 3.6 anwenden. Es ist also noch Bedingung (*) aus Satz 3.6 zu zeigen: Seien $s, \mathfrak{p}, q$ entsprechend gewählt, ohne Einschränkung mit $I \subseteq \mathfrak{p}$.
1. Fall: $p \in \mathfrak{p}$.
In diesem Falle ist $A_\mathfrak{p}$ ein gemischtcharakteristischer, unverzweigter (siehe Beweis von Satz 3.6, Punkt c)) Ring und p in keinem assoziierten Primideal von $A_\mathfrak{p}/IA_\mathfrak{p}$ enthalten. Ist nun $c(I\widehat{A_\mathfrak{p}}) = 0$, so ist $I\widehat{A_\mathfrak{p}} = 0$, mithin $IA_\mathfrak{p} = 0$ und die Behauptung ist klar.
Ist hingegen $c(I\widehat{A_\mathfrak{p}}) > 0$, so ist nach Induktionsannahme $H^t_{IA_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) = 0$ für jedes $t \geq dim(M_\mathfrak{p}) + 1 - [(dim(M_\mathfrak{p}) - 1)/c(I\widehat{A_\mathfrak{p}})]$, also erst recht für jedes $t \geq d - 1 - [(d - s - 2)/c]$ (verwende $c(I\widehat{A_\mathfrak{p}}) \leq c$ (Lemma 3.3) und $dim(M_\mathfrak{p}) \leq d - s - 1$ zusammen mit einem Monotonieargument wie oben).
Somit reicht es,

$$(m - s =)d + 1 - [(d-1)/c] - s \geq d - s + [(d - s - 2)/c]$$

zu zeigen:
Dies ist äquivalent mit

$$1 \geq [(d-1)/c] - [(d - s - 2)/c]$$

und also richtig (wegen $s+1 \leq c$).
2. Fall: $p \notin \mathfrak{p}$.
In diesem Fall ist $A_{\mathfrak{p}}$ ein gleichcharakteristischer Ring. Wir können den Beweis von Fall 1 wörtlich übernehmen, wenn wir "Induktionsannahme" durch [Fa], Korollar 2 ersetzen.

(*) bezeichne folgende Situation: p ist eine Primzahl, C ein kompletter p-Ring, $n \in \mathbb{N}$, $t \geq 1$, $\mathfrak{m} := (p, X_1, \ldots, X_n) \subseteq C[X_1, \ldots, X_n]$, $R := C[X_1, \ldots, X_n]_{\mathfrak{m}}$, $s := [n/t]$.

Um zu zeigen, daß Korollar 3.8 nicht "verbesserbar" ist, benötigen wir folgendes

3.9 Lemma

In der Situation (*) seien $j \in \mathbb{N}$ und $\mathfrak{a}_0, \ldots, \mathfrak{a}_j \subseteq R$ Ideale der reinen Höhe t (das heißt, daß für jedes $l \in \{0, \ldots, j\}$ alle minimalen Primoberideale von $\mathfrak{a}_l$ Höhe t haben). Für jedes $l \in \{0, \ldots, j\}$ sei p in keinem minimalen Primoberideal von $\mathfrak{a}_l$ enthalten; es bezeichne $\mathfrak{b}_j := \sum_{r=0}^{j} \mathfrak{a}_r$. Dann ist

$$H^i_{\mathfrak{b}_j}(R) = 0 \text{ für jedes } i \geq n - s + j + 2$$

Beweis:
Induktion nach j:
$j = 0$: Wegen Korollar 3.8 gilt

$$cd(\mathfrak{a}_0) \leq n + 1 - [n/t] = n - s + 1$$

wie gewünscht.
$j > 0$: Setze $\mathfrak{b}_{j-1} := \sum_{r=0}^{j-1} \mathfrak{a}_r$, $\mathfrak{c}_{j-1} := \sum_{r=0}^{j-1} (\mathfrak{a}_r \cap \mathfrak{a}_j)$. Dann ist

$$\sqrt{\mathfrak{b}_{j-1} \cap \mathfrak{a}_j} = \sqrt{\sum_{r=0}^{j-1} (\mathfrak{a}_r \cap \mathfrak{a}_j)} = \sqrt{\mathfrak{c}_{j-1}}$$

Nach Induktionsannahme ist

$$H^i_{\mathfrak{b}_{j-1}}(R) = H^i_{\mathfrak{c}_{j-1}} = 0 \text{ für jedes } i \geq n - s + j + 1$$

Wegen Korollar 3.8 ist

$$H^i_{\mathfrak{a}_j}(R) = 0 \text{ für jedes } i \geq n - s + 1$$

Aus der Mayer-Vietoris-Sequenz, angewendet auf $\mathfrak{b}_{j-1}$ und $\mathfrak{a}_j$ ergibt sich unmittelbar die Behauptung.

Satz 3.10 zeigt, daß unter gewissen Voraussetzungen die Grenze aus Satz 3.8 tatsächlich angenommen wird. Weiter unten wird ein Beispiel angegeben, bei dem diese Voraussetzungen erfüllt sind.

3.10 Satz

In der Situation (*) seien $\mathfrak{a}_0, \ldots, \mathfrak{a}_s \subseteq R$ Ideale der reinen Höhe t mit $\sqrt{\mathfrak{a}_0 + \ldots + \mathfrak{a}_s} = \mathfrak{m}$. Für jedes $l \in \{0, \ldots, s\}$ sei p in keinem minimalen Primoberideal von $\mathfrak{a}_l$ enthalten; es bezeichne $\mathfrak{a} := \mathfrak{a}_0 \cap \ldots \cap \mathfrak{a}_s$.
Dann ist

$$cd(\mathfrak{a}) = n + 1 - [n/t]$$

Beweis:
Für $j \in \{0, \ldots, s\}$ setze

$$\sigma_j := (\mathfrak{a}_0 \cap \ldots \cap \mathfrak{a}_j) + \mathfrak{a}_{j+1} + \ldots + \mathfrak{a}_s$$

Zeige

$$cd(\sigma_j) = n - j + 1 \quad (j \in \{0, \ldots, s\})$$

womit die Behauptung für $j = s$ folgt:
Beweis hiervon durch Induktion nach j:
$j = 0$:
Es gilt

$$cd(\sigma_0) = cd(\mathfrak{m}_R) = dim(R) = n + 1$$

wie gewünscht.
$j > 0$:
Setze

$$\mathfrak{a}' := \mathfrak{a}_j + \ldots + \mathfrak{a}_s$$

$$\mathfrak{a}'' := (\mathfrak{a}_0 \cap \ldots \cap \mathfrak{a}_{j-1}) + \mathfrak{a}_{j+1} + \ldots + \mathfrak{a}_s$$

Wie man leicht sieht, gelten

$$\sqrt{\sigma_j} = \sqrt{\mathfrak{a}' \cap \mathfrak{a}''}$$

und

$$\mathfrak{a}' + \mathfrak{a}'' = \sigma_{j-1}$$

Nach Lemma 3.9 ist

$$H^i_{\mathfrak{a}'}(R) = H^i_{\mathfrak{a}''}(R) = 0 \text{ für jedes } i \geq n - s + (s - j) + 2 = n - j + 2$$

Sei nun $i > n-j+1$: Im Ausschnitt

$$H^i_{\mathfrak{a}'}(R) \oplus H^i_{\mathfrak{a}''}(R) \to H^i_{\sigma_j}(R) \to H^{i+1}_{\sigma_{j-1}}(R)$$

aus einer Mayer-Vietoris-Sequenz verschwindet das linke Objekt gemäß obigem, das rechte nach Induktionsannahme. Wir erhalten $H^i_{\sigma_j}(R) = 0$, das heißt $cd(\sigma_j) \le n-j+1$. Andererseits ist in dem Ausschnitt

$$H^{n-j+1}_{\sigma_j}(R) \to H^{n-j+2}_{\sigma_{j-1}}(R) \to H^{n-j+2}_{\mathfrak{a}'}(R) \oplus H^{n-j+2}_{\mathfrak{a}''}(R)$$

aus derselben Mayer-Vietoris-Sequenz das mittlere Objekt nach Induktionsannahme nicht Null, das rechte gemäß obigem schon; es folgt $cd(\sigma_j) \ge n-j+1$.
Insgesamt folgt $cd(\sigma_j) = n-j+1$, was zu zeigen war.

Aus Satz 3.10 ergibt sich insbesondere, daß Korollar 3.8 für alle $1 \le c \le d$ "nicht verbesserbar" ist:
Sei dazu in der Situation (*) $n \ge t$, also $s \ge 1$. Betrachte folgende Primideale der Höhe t:

$$\mathfrak{a}_0 := (p + X_t, X_1, \dots, X_{t-1})$$

$$\mathfrak{a}_1 := (X_t, \dots, X_{2t-1})$$

$$\vdots$$

$$\mathfrak{a}_l := (X_{lt}, \dots, X_{(l+1)t-1})$$

$$\vdots$$

$$\mathfrak{a}_{s-1} := (X_{(s-1)t}, \dots, X_{st-1})$$

$$\mathfrak{a}_s := (X_{n-t+1}, \dots, X_n)$$

Hierbei wird übrigens nicht vorausgesetzt, daß $n-t+1$ um eins größer ist als $st-1$. Aus Satz 3.10 ergibt sich, daß Korollar 3.8 nicht in dieser Allgemeinheit verbessert werden kann.

Als nächstes wird der Fall $p \in \sqrt{I}$ behandelt. Obwohl dann keine zu Satz 3.6 analoge Aussage zur Verfügung steht, läßt sich doch fast die gleiche Abschätzung wie in Korollar 3.8 nachweisen.

3.11 Satz

Es seien $(A, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring der Charakteristik Null, $char(A/\mathfrak{m}) = p$ prim, M ein endlich erzeugter d-dimensionaler A-Modul, A unverzweigt, $I \subsetneq A$ ein Ideal, $p \in \sqrt{I}$, $c := c(I\hat{A}) > 1$.
Dann ist $H_I^q(M) = 0$ für jedes $q \geq d + 1 - [(d-2)/(c-1)]$. Insbesondere gilt

$$cd(I) \leq dim(A) - [(dim(A) - 2)/(c-1)]$$

Beweis:
Es gelte ohne Einschränkung $M \neq 0$, $I = \sqrt{I}$ (da $c(\sqrt{I}\hat{A}) = c(I\hat{A})$), $c \leq d - 1$. Sei $\mathfrak{p} \in Supp_A(M)$.
Aus Satz 1.13 folgt: Es reicht zu zeigen:
Für jedes $q \geq d + 1 - [(d-2)/(c-1)]$ ist $H_I^q(A/\mathfrak{p}) = 0$.
Wir unterscheiden zwei Fälle:
1. Fall: $p \in \mathfrak{p}$.
Betrachte $A/\mathfrak{p}$ als A/pA-Modul; es ist

$$c' := c((I/pA)(\widehat{A/pA})) = c - 1$$

da A unverzweigt ist. Also ist $c' > 0$, wir können [Fa], Korollar 2 anwenden und erhalten:
Für jedes $q \geq dim(A/\mathfrak{p}) + 1 - [(dim(A/\mathfrak{p}) - 1/c']$ ist $H_I^q(A/\mathfrak{p}) = 0$.
Erst recht (beachte die Monotonie von $t \mapsto t + 1 - [(t-1)/c']$) gilt für jedes $q \geq d + 1 - [(d-2)/(c-1)]$ auch $H_I^q(A/\mathfrak{p}) = 0$, wie gewünscht.
2. Fall: $p \notin \mathfrak{p}$.
Dann ist $dim(A/(\mathfrak{p}, p)) \leq d - 1$. Wie im 1. Fall ist wieder $c' := c((I/pA)(\widehat{A/pA})) = c - 1$ und also $c' > 0$. Nach [Fa], Korollar 2 ist also $H_I^q(A/(\mathfrak{p}, p)) = 0$ für jedes $q \geq dim(A/(\mathfrak{p}, p)) + 1 - [(dim(A/(\mathfrak{p}, p)) - 1)/c']$. Erst recht ist also (wegen $dim(A/(\mathfrak{p}, p)) \leq d - 1$ und einem Monotonieargument wie im 1. Fall) $H_I^q(A/(\mathfrak{p}, p)) = 0$ für jedes $q \geq d - [(d-2)/(c-1)]$. Somit erhalten wir aus der von

$$0 \to A/\mathfrak{p} \xrightarrow{p} A/\mathfrak{p} \to A/(\mathfrak{p}, p) \to 0$$

induzierten langen exakten Kohomologiesequenz, daß für jedes $q \geq d + 1 - [(d-2)/(c-1)]$ die Abbildung

$$H_I^q(A/\mathfrak{p}) \xrightarrow{p} H_I^q(A/\mathfrak{p})$$

bijektiv ist. Andererseits wird jedes Element von $H_I^q(A/\mathfrak{p})$ von einer Potenz von p annulliert. Folglich gilt $H_I^q(A/\mathfrak{p}) = 0$ für jedes $q \geq d + 1 - [(d-2)/(c-1)]$, wie gewünscht; der Satz ist bewiesen.

(+) bezeichne folgende Situation: p eine Primzahl, C ein kompletter p-Ring, $n \geq 1$, $t \geq 2$, $\mathfrak{m} := (p, X_1, \ldots, X_n) \subseteq C[X_1, \ldots, X_n]$, $R := C[X_1, \ldots, X_n]_{\mathfrak{m}}$, $\mathfrak{m}_R := \mathfrak{m}R$, $s := [(n-1)/(t-1)]$.

Um auch in der Situation von 3.11 zu beweisen, daß die Abschätzung scharf ist, benötigen wir folgendes, dem Lemma 3.9 ähnliche

3.12 Lemma

In der Situation (+) seien $j \in \mathbb{N}$ und $\mathfrak{a}_0, \ldots, \mathfrak{a}_j \subseteq R$ Ideale der reinen Höhe t, die p enthalten, $\mathfrak{b}_j := \sum_{r=0}^{j} \mathfrak{a}_r$. Dann ist

$$H^i_{\mathfrak{b}_j}(R) = 0 \text{ für jedes } i \geq n - s + j + 2$$

Beweis:
Induktion nach j:
$j = 0$: Wegen Satz 3.11 gilt

$$cd(\mathfrak{a}_0) \leq n + 1 - [(n-1)/(t-1)] = n - s + 1$$

wie gewünscht.
$j > 0$: Setze $\mathfrak{b}_{j-1} := \sum_{r=0}^{j-1} \mathfrak{a}_r, \mathfrak{c}_{j-1} := \sum_{r=0}^{j-1} (\mathfrak{a}_r \cap \mathfrak{a}_j)$. Dann ist

$$\sqrt{\mathfrak{b}_{j-1} \cap \mathfrak{a}_j} = \sqrt{\sum_{r=0}^{j-1} (\mathfrak{a}_r \cap a_j)} = \sqrt{\mathfrak{c}_{j-1}}$$

Nach Induktionsannahme ist

$$H^i_{\mathfrak{b}_{j-1}}(R) = H^i_{\mathfrak{c}_{j-1}} = 0 \text{ für jedes } i \geq n - s + j + 1$$

Wegen Satz 3.11 ist

$$H^i_{\mathfrak{a}_j}(R) = 0 \text{ für jedes } i \geq n - s + 1$$

Aus der Mayer-Vietoris-Sequenz, angewendet auf $\mathfrak{b}_{j-1}$ und $\mathfrak{a}_j$ ergibt sich unmittelbar die Behauptung.

Der nächste Satz zeigt, daß die Grenze in Satz 3.11 unter gewissen Voraussetzungen tatsächlich angenommen wird. Weiter unten findet sich dann wieder der Nachweis, daß es Situationen gibt, in denen diese Voraussetzungen erfüllt sind.

3.13 Satz

In der Situation (+) seien $\mathfrak{a}_0, \ldots, \mathfrak{a}_s \subseteq R$ Ideale der reinen Höhe t, die p enthalten und für die gilt: $\sqrt{\mathfrak{a}_0 + \ldots + \mathfrak{a}_s} = \mathfrak{m}_R$, $\mathfrak{a} := \mathfrak{a}_0 \cap \ldots \cap \mathfrak{a}_s$.
Dann ist

$$cd(\mathfrak{a}) = n + 1 - [(n-1)/(t-1)]$$

Beweis:
Für $j \in \{0, \ldots, s\}$ setze

$$\sigma_j := (\mathfrak{a}_0 \cap \ldots \cap \mathfrak{a}_j) + \mathfrak{a}_{j+1} + \ldots + \mathfrak{a}_s$$

Zeige

$$cd(\sigma_j) = n - j + 1 \quad (j \in \{0, \ldots, s\})$$

durch Induktion nach j:
$j = 0$:
Es gilt

$$cd(\sigma_0) = cd(\mathfrak{m}_R) = dim(R) = n + 1$$

wie gewünscht.
$j > 0$:
Setze

$$\mathfrak{a}' := \mathfrak{a}_j + \ldots + \mathfrak{a}_s$$

$$\mathfrak{a}'' := (\mathfrak{a}_0 \cap \ldots \cap \mathfrak{a}_{j-1}) + \mathfrak{a}_{j+1} + \ldots + \mathfrak{a}_s$$

Wie man leicht sieht, gelten

$$\sqrt{\sigma_j} = \sqrt{\mathfrak{a}' \cap \mathfrak{a}''}$$

und

$$\mathfrak{a}' + \mathfrak{a}'' = \sigma_{j-1}$$

Nach Lemma 3.12 ist

$$H^i_{\mathfrak{a}'}(R) = H^i_{\mathfrak{a}''}(R) = 0 \text{ für jedes } i \geq n - s + (s-j) + 2 = n - j + 2$$

Sei nun $i > n - j + 1$: Im Ausschnitt

$$H^i_{\mathfrak{a}'}(R) \oplus H^i_{\mathfrak{a}''}(R) \to H^i_{\sigma_j}(R) \to H^{i+1}_{\sigma_{j-1}}(R)$$

aus einer Mayer-Vietoris-Sequenz verschwindet das linke Objekt gemäß obigem, das rechte nach Induktionsannahme. Wir erhalten $H^i_{\sigma_j}(R) = 0$, das heißt $cd(\sigma_j) \leq n - j + 1$. Andererseits ist in dem Ausschnitt

$$H^{n-j+1}_{\sigma_j}(R) \to H^{n-j+2}_{\sigma_{j-1}}(R) \to H^{n-j+2}_{\mathfrak{a}'}(R) \oplus H^{n-j+2}_{\mathfrak{a}''}(R)$$

aus derselben Mayer-Vietoris-Sequenz das mittlere Objekt nach Induktionsannahme nicht Null, das rechte gemäß obigem schon; es folgt $cd(\sigma_j) \geq n - j + 1$.
Insgesamt folgt $cd(\sigma_j) = n - j + 1$, was zu zeigen war.

Aus Satz 3.13 ergibt sich insbesondere, daß Satz 3.11 für alle $2 \leq c \leq d$ "nicht verbesserbar" ist:
Sei dazu in der Situation (+) $n \geq t$, also $s \geq 1$ und betrachte folgende Primideale der Höhe t:

$$\mathfrak{a}_0 := (p, X_1, \ldots, X_{t-1})$$
$$\mathfrak{a}_1 := (p, X_t, \ldots, X_{2t-2})$$
$$\vdots$$
$$\mathfrak{a}_l := (p, X_{lt-(l-1)}, \ldots, X_{(l+1)t-(l+1)})$$
$$\vdots$$
$$\mathfrak{a}_{s-1} := (p, X_{(s-1)t-(s-2)}, \ldots, X_{st-s})$$
$$\mathfrak{a}_s := (p, X_{n-t+2}, \ldots, X_n)$$

Beachte dabei, daß

$$n - t + 1 \leq st - s$$

gilt, wie man leicht nachrechnet.
Aus Satz 3.13 ergibt sich folglich, daß Satz 3.11 in dieser Allgemeinheit nicht verbesserbar ist.

4. Zu einer Frage von Huneke über die Endlichkeit lokaler Kohomologie

Im folgenden seien stets R ein noetherscher lokaler Ring, I ein Ideal von R und M ein endlich erzeugter R-Modul.
Huneke stellte folgende Frage (vgl. [Hu], Problem 3.3): Betrachte die Menge

$$W := \{depth(M_\mathfrak{p}) + height((I+\mathfrak{p})/\mathfrak{p}) | \mathfrak{p} \in Spec(R), \mathfrak{p} \not\supseteq I\}$$

Gilt dann stets

$$W = \{n \in \mathbf{N} | H_I^n(M) \text{ nicht endlich erzeugt}\} \quad ?$$

Diese zunächst etwas unmotiviert erscheinende Frage ist unter anderem deshalb interessant, weil Faltings (vgl. [Fa2], Satz 2)

$$min\ W = min\{n \in \mathbf{N} | H_I^n(M) \text{ nicht endlich erzeugt}\}$$

zeigen konnte, zumindest falls R Quotient eines regulären Rings ist.
Die Antwort auf obige Frage ist jedoch negativ, wie folgendes Beispiel zeigt:
Sei $R = \mathbf{F}_2[[X_1, X_2]]$ ein Potenzreihenring über dem Körper $\mathbf{F}_2$ in zwei Unbestimmten, $M = R$ und I das von $X_1 \cdot X_2$ in R erzeugte Ideal. Dann ist $H_I^2(M) = 0$, insbesondere ist $H_I^2(M)$ endlich erzeugt. $\mathfrak{p}$ bezeichne das von $X_1 + X_2$ in R erzeugte Ideal. Es gelten $\mathfrak{p} \not\supseteq I$,

$$\begin{aligned} depth(M_\mathfrak{p}) + height((I+\mathfrak{p})/\mathfrak{p}) &= 1 + height((X_1 + X_2) + (X_1 \cdot X_2)/(X_1 + X_2)) \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

und also $2 \in W$. Folglich ist die Antwort auf obige Frage negativ.

Literaturverzeichnis

[BS] Brodmann, M. P. und Sharp, R.J. Local Cohomology, *Cambridge studies in advanced mathematics* **60**, (1998).

[Ei] Eisenbud, D. Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry, *Springer Verlag*, (1995).

[Fa] Faltings, G. Über lokale Kohomologiegruppen hoher Ordnung, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **313**, (1993), 43-51.

[Fa2] Faltings, G. Über die Annulatoren lokaler Kohomologiegruppen, *Arch. Math.* **30**, (1978), 473-476.

[Gr] Grothendieck, A. Local Cohomology, *Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag*, (1967).

[Gr2] Grothendieck, A. Cohomologie locale des faiscaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux, *S.G.A.* **II**, (1968).

[Ha] Hartshorne, R. Affine duality and cofiniteness, *Inventiones Mathematicae* **9**, (1970), 145-164.

[HK] Huneke, C. und Koh, J. Cofiniteness and vanishing of local cohomology modules, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **110**, (1991), 421-429.

[HS] Huneke, C. und Sharp, R. Bass Numbers of Local Cohomology Modules, *Transactions of the American Mathematical Society* **339**, (1993), 765-779.

[Hu] Huneke, C. Problems on Local Cohomology, *Res. Notes Math.* **2**, (1992), 93-108.

[Ku] Kunz, E. Residuen und Dualität auf projektiven algebraischen Varietäten, *Fakultät für Mathematik der Universität Regensburg*, (1986).

[Ly] Lyubeznik, G. Finiteness properties of local cohomology modules (an application of D-modules to Commutative Algebra), *Inventiones Mathematicae* 113, (1993), 41-55.

[Ly2] Lyubeznik, G. F-Modules: Applications to Local Cohomology and D-modules in Characteristic $p > 0$, preprint.

[Ma] Matsumura, H. Commutative ring theory, *Cambridge University Press*, (1986).

[Rung] Rung, J. Mengentheoretische Durchschnitte und Zusammenhang, *Regensburger mathematische Schriften* **3**.

[Si] Singh, A. p-torsion elements in local cohomology modules, preprint, (1999).

[Wei] Weibel, C. A. An introduction to homological algebra, *Cambridge University Press*, (1994).