Bäume und "Doppelbäume" mit absoluten Häufigkeiten

Lehrerfortbildung Mathematik zur Leitidee Daten und Zufall
21. Februar 2017, 14:30 bis 17:30 Uhr

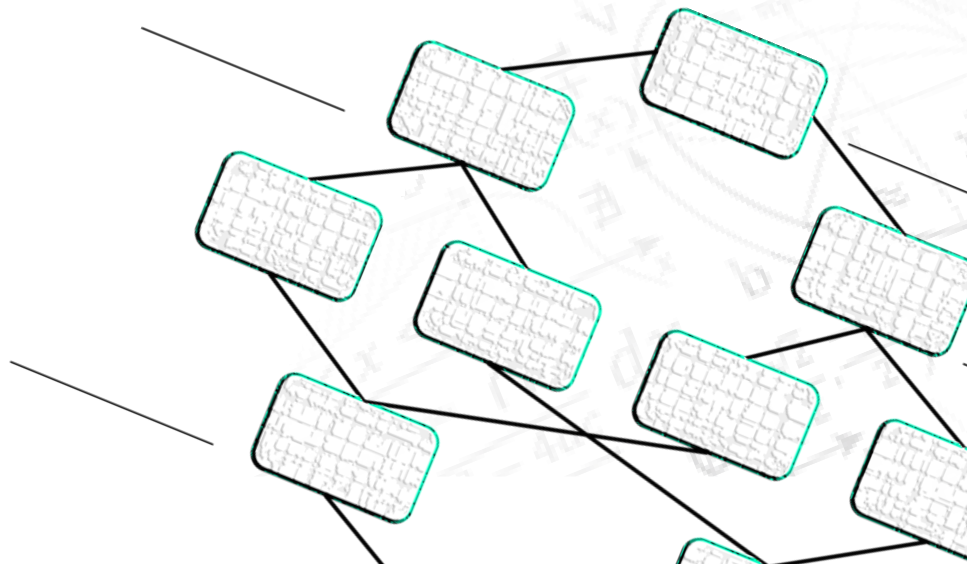
Stefan Krauss und Karin Binder
Didaktik der Mathematik
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK

Universität Regensburg

Universität Regensburg

Gliederung

- Relevanz und Verständnis bedingter Wahrscheinlichkeiten: Erkenntnisse aus der Kognitionspsychologie
- Ein neues didaktisches Werkzeug für den gymnasialen Unterricht: Der Häufigkeitsdoppelbaum
- Die „Schritt-für-Schritt“-Prozedur



Universität Regensburg

Motivation: Ein Ausflug in die Kognitionspsychologie

Kurz nach Einführung der HIV-Tests erhielten 22 Blutspender in Florida die Information, dass ihr HIV-Test positiv war.

→

7 von diesen 22 Personen begingen Selbstmord, ohne zu wissen, ob das Ergebnis stimmte.

Universität Regensburg

Eine „berühmte“ kognitive Illusion: Mammographie-Screening

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau, die zu einer Routineuntersuchung geht, Brustkrebs hat, beträgt **1 %**.

Wenn eine Frau, die zu einer Routineuntersuchung geht, Brustkrebs hat, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass sie ein positives Mammogramm erhält **80 %**.

Wenn eine Frau, die zu einer Routineuntersuchung geht, keinen Brustkrebs hat, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass sie ein positives Mammogramm erhält **9,6 %**.

Frage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau, die zu einer Routineuntersuchung geht, Brustkrebs hat, wenn sie dort ein positives Mammogramm erhält?

- Aufgrund der großen Relevanz „Bayesianischen Denkens“ schaffen es solche „kognitiven Illusionen“ (und was man dagegen tun kann!) auch wiederholt in die weltweit renommierteste Zeitschrift **Science** (z. B. auch für juristische Kontexte).
- Der Psychologe Daniel Kahneman bekam 2008 sogar den **Nobelpreis** u.a. für die Übertragung von „statistischen Illusionen“ auf die Wirtschaftswissenschaften.

Universität Regensburg

„Bayesianische“ Aufgaben in der Schule

EREIGNISSE	**B**	Frau hat Brustkrebs
	$\bar{B}$	Frau hat keinen Brustkrebs
	M+	Frau hat einen positiven Befund in der Mammographie erhalten
	M-	Frau hat einen negativen Befund in der Mammographie erhalten
WAHRSCHEIN-LICHKEITEN	**$P(B)$**	Prävalenz
	$P_B(M+)$	Sensitivität des Diagnoseverfahrens
	$P_{\bar{B}}(M+)$	Falsch-Positiv-Rate (= 1– Spezifität)

G9: FORMEL VON BAYES

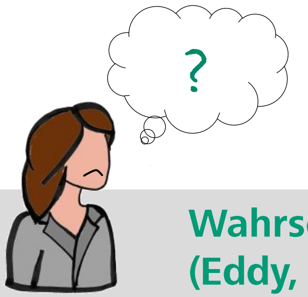
$$P_{M+}(B) = \frac{P_B(M+)\cdot P(B)}{P_B(M+)\cdot P(B) + P_{\bar{B}}(M+)\cdot P(\bar{B})}$$

G8: Pfadregeln

LehrplanPlus: (Doppel)baum mit absoluten Häufigkeiten in den Knoten

Idee 1:

Ersetze die Wahrscheinlichkeiten durch zwei absolute Häufigkeiten (statt 80% z.B.: „4 von 5“, „80 von 100“, sog. „natürliche Häufigkeiten“)



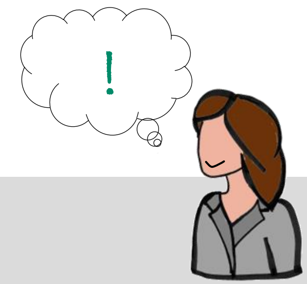
Wahrscheinlichkeitsvariante (Eddy, 1982)

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau, die zu einer Routineuntersuchung geht, Brustkrebs hat, beträgt **1 %**.

Wenn eine Frau, die zu einer Routineuntersuchung geht, Brustkrebs hat, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass sie ein positives Mammogramm erhält **80 %**.

Wenn eine Frau, die zu einer Routineuntersuchung geht, keinen Brustkrebs hat, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass sie ein positives Mammogramm erhält **9,6 %**.

Frage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau, die zu einer Routineuntersuchung geht, Brustkrebs hat, wenn sie dort ein positives Mammogramm erhält?



Häufigkeitsvariante (Gigerenzer & Hoffrage, 1995)

100 von 10.000 Frauen, die zu einer Routineuntersuchung gehen, haben Brustkrebs.

80 von 100 Frauen, die zu einer Routineuntersuchung gehen und die Brustkrebs haben, erhalten ein positives Mammogramm.

950 von 9.900 Frauen, die zu einer Routineuntersuchung gehen und die keinen Brustkrebs haben, erhalten ein positives Mammogramm.

Frage: Wie viele der Frauen, die zu einer Routineuntersuchung gehen und ein positives Mammogramm erhalten, haben Brustkrebs?

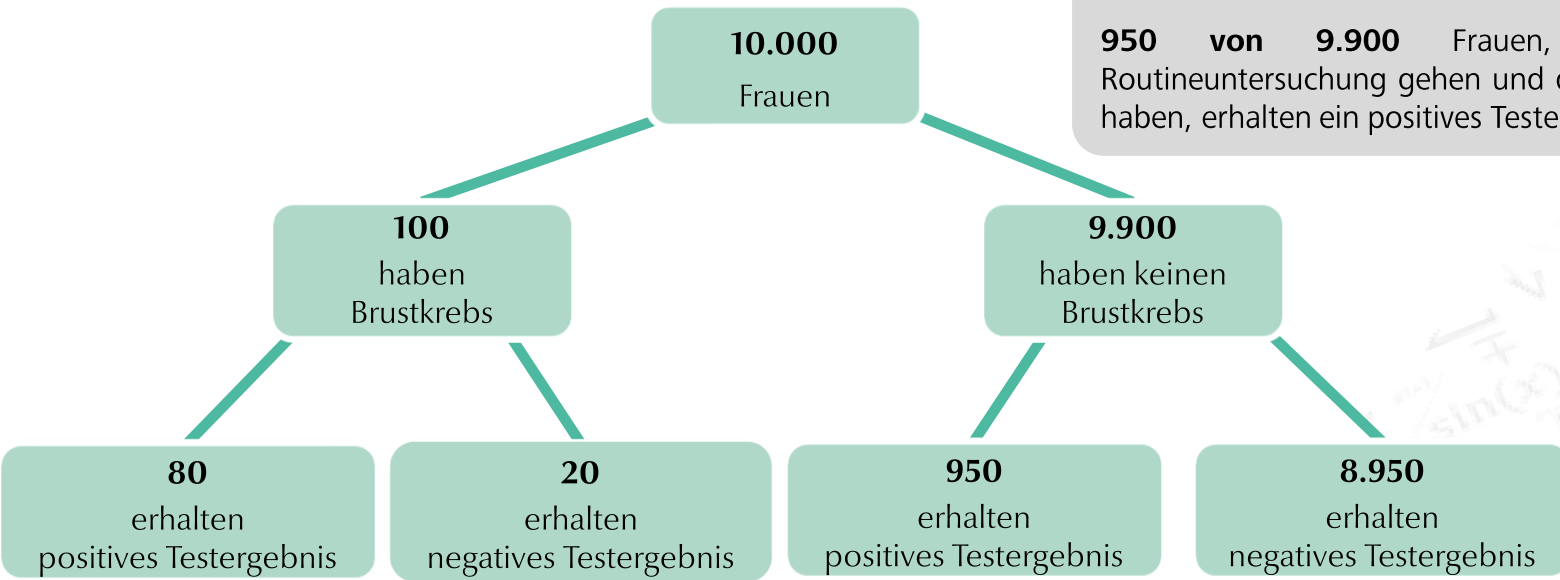
Denken in natürlichen Häufigkeiten

Häufigkeitsvariante (Gigerenzer & Hoffrage, 1995)

100 von 10.000 Frauen, die zu einer Routineuntersuchung gehen, haben Brustkrebs.

80 von 100 Frauen, die zu einer Routineuntersuchung gehen und die Brustkrebs haben, erhalten ein positives Testergebnis.

950 von 9.900 Frauen, die zu einer Routineuntersuchung gehen und die keinen Brustkrebs haben, erhalten ein positives Testergebnis.

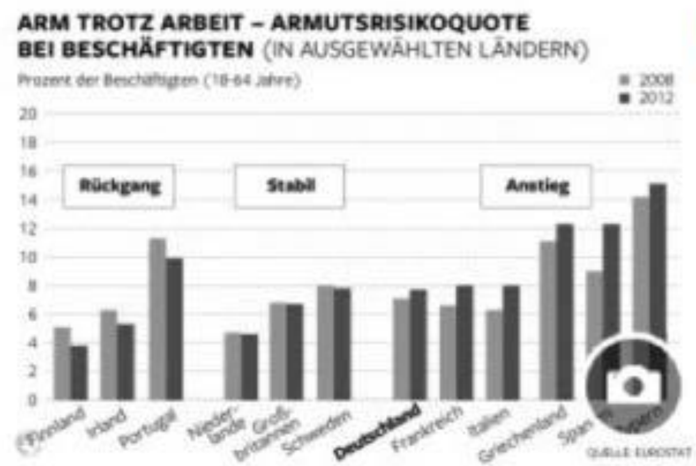


Frage: Wie viele der Frauen, die ein positives Testergebnis erhalten, haben tatsächlich Brustkrebs?
Antwort: 80 von 1.030 $\approx$ 8 %

Zwei von fünf Alleinerziehenden beziehen Hartz IV

Es gibt aber sogar noch einen weiteren gewichtigen Grund für die Thematisierung „natürlicher Häufigkeiten“ in der Schule!

In etwa jeder fünften deutschen Familie ist nur ein Erwachsener allein für die Kinder verantwortlich, mit steigender Tendenz. Und für sie ist das Armutsrisiko besonders hoch: Rund 40 Prozent aller Alleinerziehenden beziehen Hartz IV – während bei Familien mit zwei Elternteilen nur acht Prozent auf die Grundsicherung angewiesen sind. Die Kinderarmut in der Bundesrepublik sei damit zum großen Teil darauf zurückzuführen, dass die betroffenen Kinder in Familien mit nur einem Elternteil aufwachsen – zu diesem Ergebnis kommt eine Studie im Auftrag der Bertelsmann-



Europäische Union

Arbeit bedeutet nicht immer ein Leben ohne

In fast neun von zehn Fällen sind die Alleinerziehenden Frauen. Häufig stoßen sie an Grenzen, psychisch, körperlich und auch finanziell. "Kinder leiden, wenn finanzielle Sorgen oder Stress den Alltag prägen. Kinder Alleinerziehender sind nicht nur öfter von Armut betroffen. Die Mütter arbeiten auch häufiger in Vollzeit", sagt Stiftungsvorstand Dräger. Für die Kinder bedeutet das häufig, keinen Zugang zu Bildungs-, Kultur- oder Freizeitangeboten zu haben.

Universität Regensburg

vgl. Fortbildung Herbst 2015
(Unterlagen auf Homepage)

Darstellungen statistischer Informationen

Numerische Darstellungen	Beispiel	bislang v.a. in
1) Prozente	25 %	Schule & Medien
2) Dezimalbrüche	0,25	Schule
3) Gewöhnliche Brüche	¼	Schule
4) „Natürliche“ Häufigkeiten	1 von 4	Medien
5) „Jeder wievielte“	jeder vierte	Medien
6) Chancenverhältnisse	1 : 3 („1 zu 3“)	eher selten

→ Vor allem 4) und 5) sind in den Medien sehr häufig (einfache „Grundvorstellung“; Vermeidung von Brüchen und von Prozent)

→ Nur 4) ist für alle rationalen Verhältnisse möglich und bereits *ohne entsprechenden Unterricht* verständnisfördernd!

Universität Regensburg

Typische Informationen in Stochastik-Aufgaben

	Wahrscheinlichkeit		**Anteil**	
Darstellung	Brüche	Prozent	Prozent	Natürliche Häufigkeiten
Beispiel	0,25 bzw. 1/4	25 %	25%	1 von 4
Information	Die Wahrscheinlichkeit, dass …, ist 0,25 (1/4)	Die Wahrscheinlichkeit, dass …, ist 25%	25% der Personen …	1 von 4 (oder 25 von 100) Personen …

→ Neue Möglichkeit, 1) Aufgaben zu formulieren und 2) Fragen zu stellen!

→ Aufgaben werden dadurch 1) nicht nur einfacher, sondern 2) so wird auch der Anspruch eingelöst, Schüler z.B. zu „mündigen Medienkonsumenten" zu machen!

Universität Regensburg

In welcher der sechs Darstellungen lassen sich überhaupt Anteile bzw. Wahrscheinlichkeiten ausdrücken?

	Darstellungsart	Beispiel	Anteil / Wsk
(1)	Prozente	25 %	✓ / ✓
(2)	Gewöhnliche Brüche	¼	✓ / ✓
(3)	Dezimalbrüche	0,25	(✓) / ✓
(4)	Natürliche Häufigkeiten	1 von 4	✓ / –
(5)	Jeder Wievielte	Jeder Vierte	✓ / –
(6)	Chancenverhältnisse	1 : 3	✓ / ✓

→ 2) und 3) für Wahrscheinlichkeiten sind übrigens (nur) in der Schule üblich!

→ Sehr oft ist aber *dennoch* eine Übersetzung von Wahrscheinlichkeitsaufgaben in natürliche Häufigkeiten möglich

Universität Regensburg

Neu im LehrplanPlus (6. Klasse)

Die Schülerinnen und Schüler…

…entnehmen einfachen Texten (z. B. Zeitungsartikeln), die Prozentangaben enthalten, die wesentlichen mathematischen Informationen und prüfen diese auf Korrektheit; dabei gehen sie flexibel mit **in den Medien häufig verwendeten alternativen Darstellungen** von Prozentangaben um (z. B. **„jeder Siebte“, „drei von fünf“**).

Bemerkung:
Da die (aus der Kognitionspsychologie stammende) Bezeichnung „natürliche Häufigkeiten“ kein mathematischer Terminus Technicus ist, wird sie im LehrplanPlus nicht explizit verwendet.

Universität Regensburg

Ein kurzer Blick zurück:

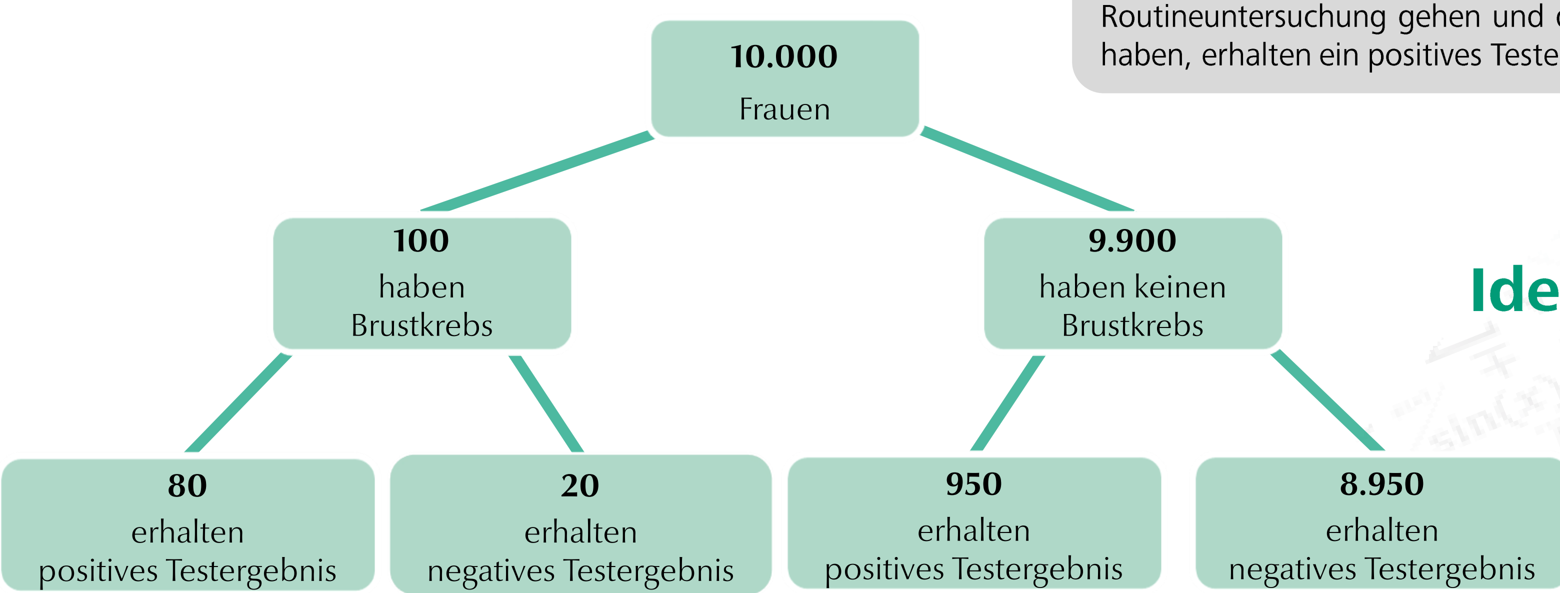
Baumdiagramme mit absoluten Häufigkeiten in den Knoten visualisieren natürliche Häufigkeiten im Falle von zwei Merkmalen

Häufigkeitsvariante (Gigerenzer & Hoffrage, 1995)

100 von 10.000 Frauen, die zu einer Routineuntersuchung gehen, haben Brustkrebs.

80 von 100 Frauen, die zu einer Routineuntersuchung gehen und die Brustkrebs haben, erhalten ein positives Testergebnis.

950 von 9.900 Frauen, die zu einer Routineuntersuchung gehen und die keinen Brustkrebs haben, erhalten ein positives Testergebnis.



Idee 2!

Frage: Wie viele der Frauen, die ein positives Testergebnis erhalten, haben tatsächlich Brustkrebs?

Antwort: 80 von 1.030 $\approx$ 8 %

Universität Regensburg

Neu im LehrplanPlus (10. Klasse)

Die Schülerinnen und Schüler…

…verstehen, dass in Sachzusammenhängen (z. B. in der medizinischen Diagnostik) klar zwischen $P_B(A)$ und $P_A(B)$ unterschieden werden muss, und sind in der Lage, mithilfe von Vierfeldertafeln oder **Baumdiagrammen** – auch solchen, in denen sie Wahrscheinlichkeiten mithilfe von **absoluten Häufigkeiten in den** Feldern bzw. **Knoten** illustrieren – von der einen auf die andere bedingte Wahrscheinlichkeit zu schließen.

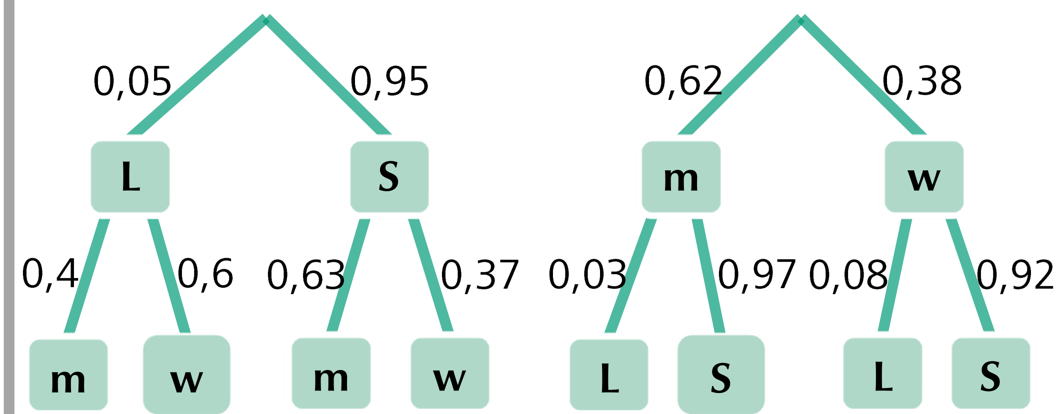
Bisher: Visualisierungen in der Schule

Vierfeldertafeln

	Lehrer **L**	Schüler **S**	
männlich **m**	0,02	0,6	0,62
weiblich **w**	0,03	0,35	0,38
	0,05	0,95	1

Relative Häufigkeiten

Baumdiagramme



	Lehrer **L**	Schüler **S**	
männlich **m**	8	240	248
weiblich **w**	12	140	152
	20	380	400

Absolute Häufigkeiten

Neu im LehrplanPLUS !

Bisher: Visualisierungen in der Schule

Vierfeldertafeln

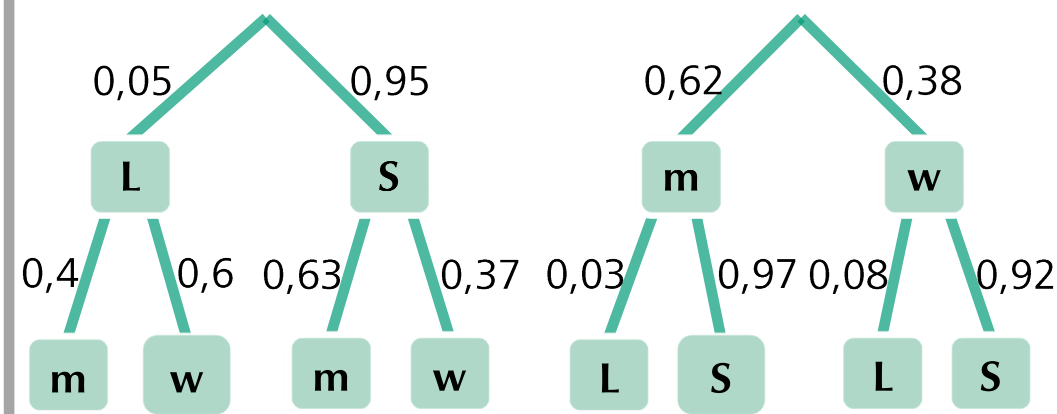
	Lehrer L	Schüler S	
männlich m	0,02	0,6	0,62
weiblich w	0,03	0,35	0,38
	0,05	0,95	1

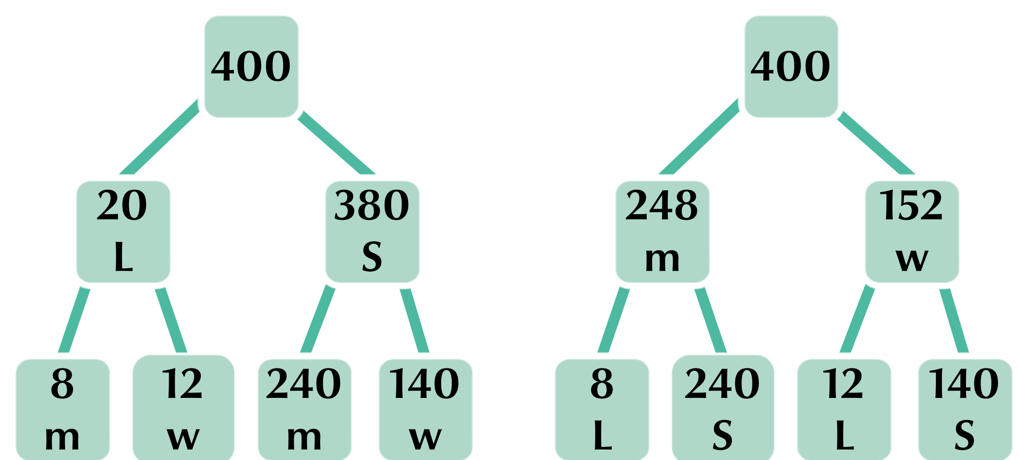
Relative Häufigkeiten

	Lehrer L	Schüler S	
männlich m	8	240	248
weiblich w	12	140	152
	20	380	400

Absolute Häufigkeiten

Baumdiagramme



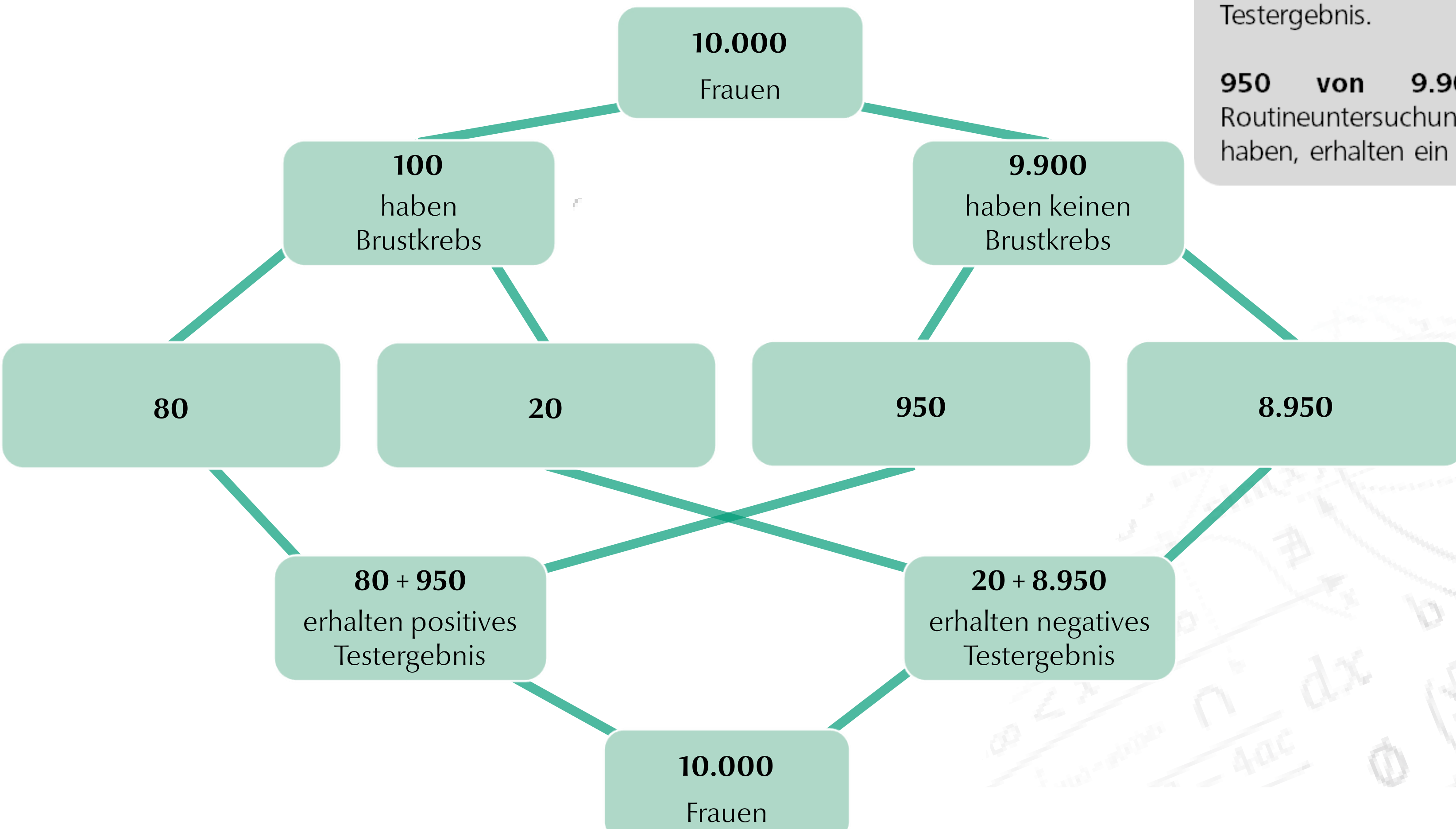


Universität Regensburg

Der Häufigkeitsdoppelbaum

Ausbau von Idee 2

Die Fälle mit positivem bzw. negativem Testergebnis können unten wieder „zusammengeführt“ werden:



Häufigkeitsvariante (Gigerenzer &

100 von 10.000 Frauen, die
untersuchung gehen, haben Brust

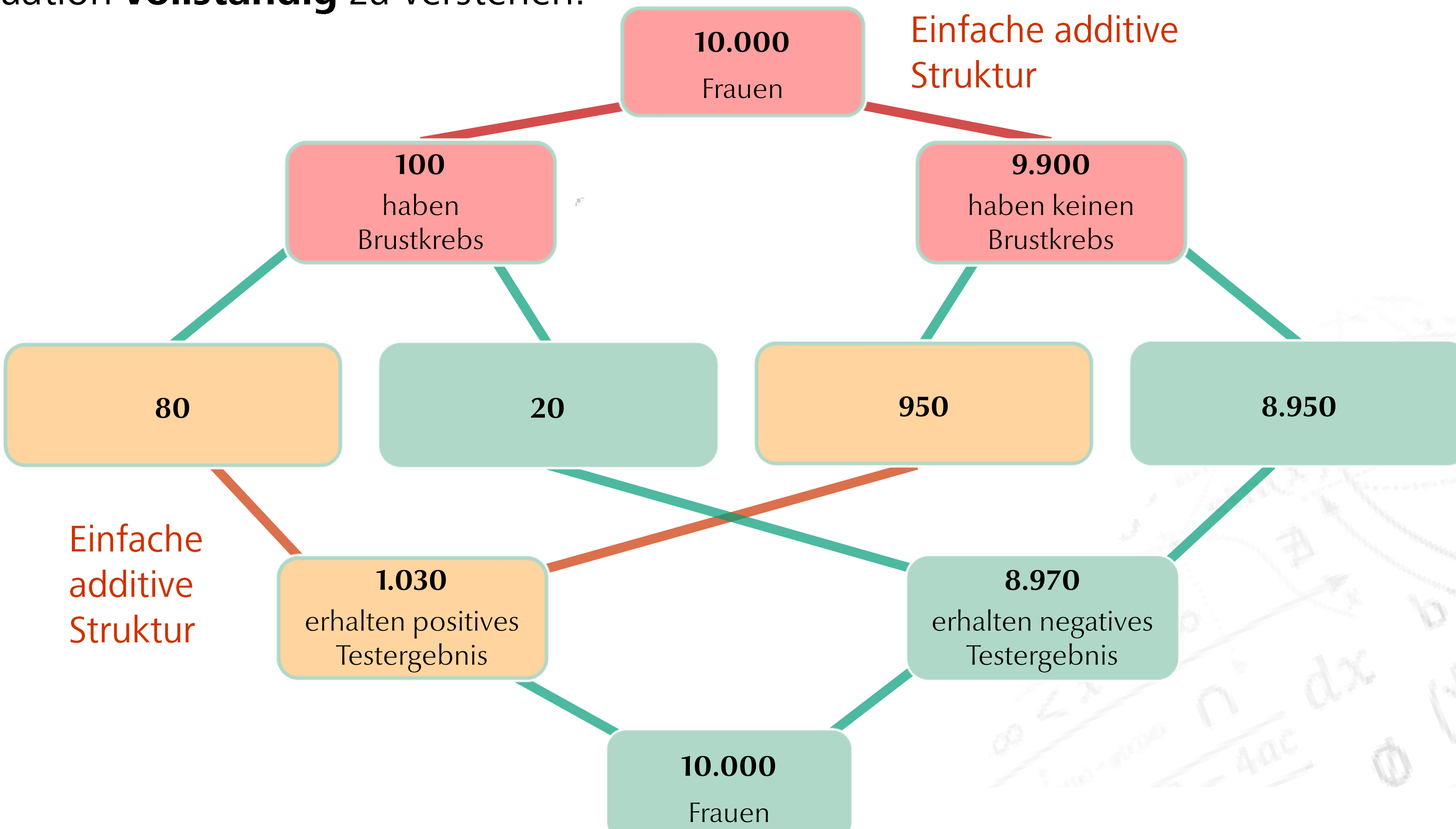
80 von 100 Frauen, die zu einer
gehen und die Brustkrebs haben,
Testergebnis.

950 von 9.900 Frauen,
Routineuntersuchung gehen und
haben, erhalten ein positives Teste

Der Häufigkeitsdoppelbaum

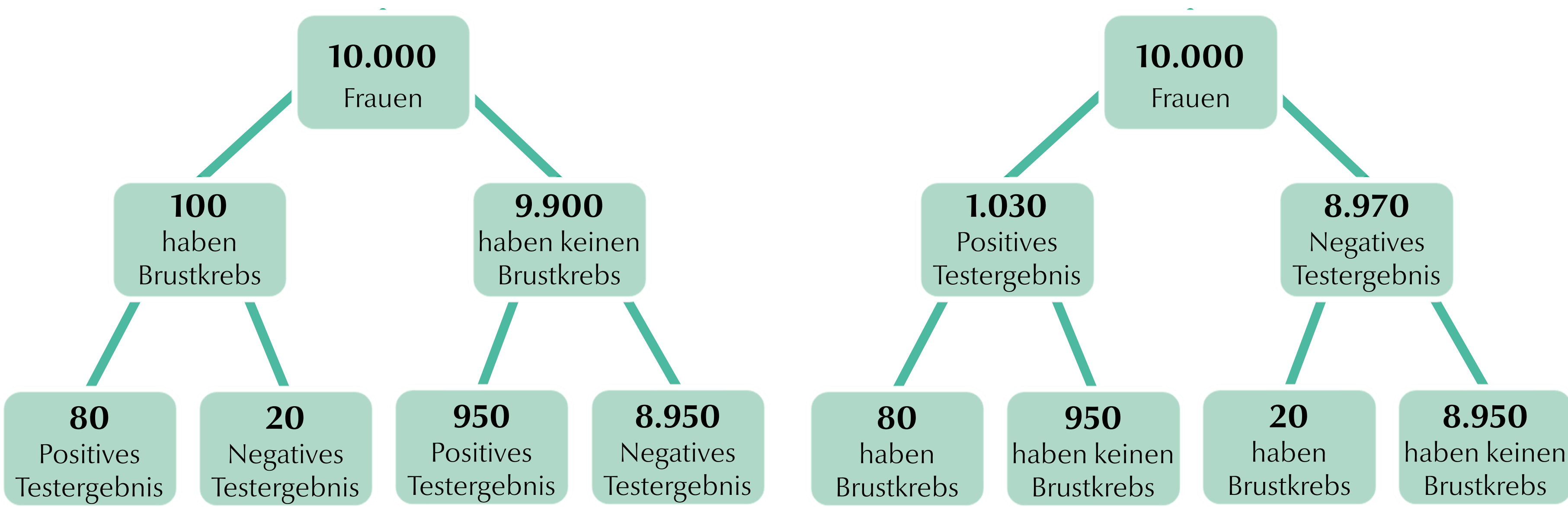
Ausbau von Idee 2

Ausgehend von den Zahlen einer „Bayesianischen Aufgabe“ in natürlichen Häufigkeiten erfordert es nur einfache Additionen, um den Doppelbaum zu komplettieren und die Situation **vollständig** zu verstehen.



Universität Regensburg

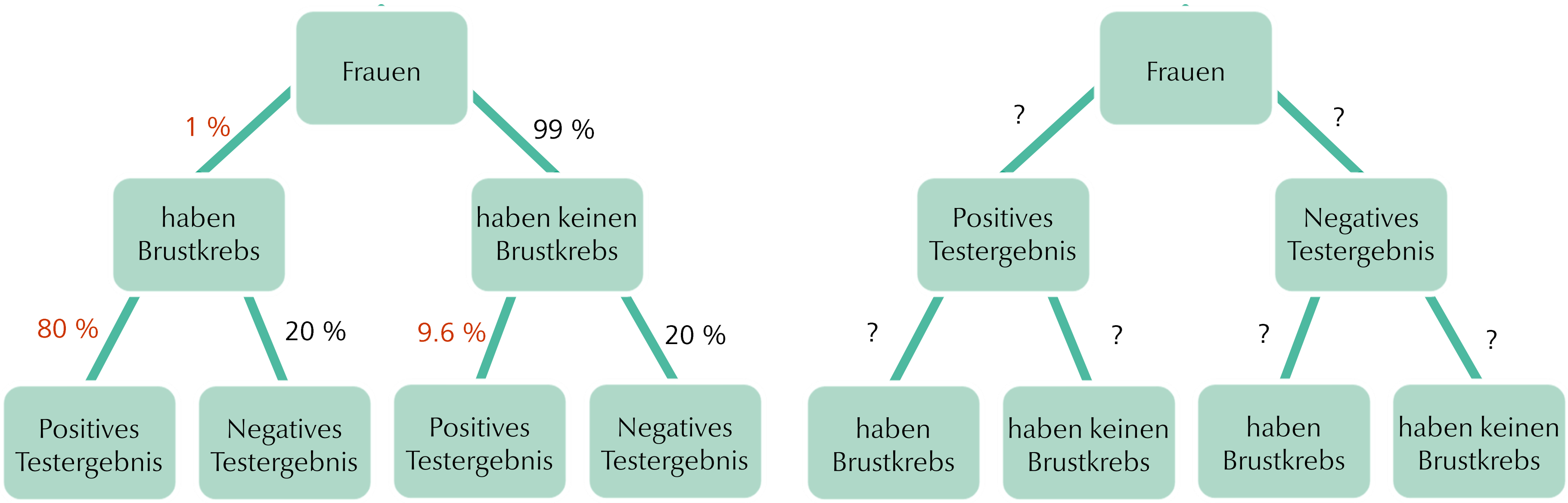
Vom Häufigkeitsbaum zum Doppelbaum



(Animation kippt den rechten Baum um und schiebt ihn unter den linken Baum.)

Universität Regensburg

Und bei der typischen „Bayesianischen Aufgabe“ mit Wahrscheinlichkeiten?

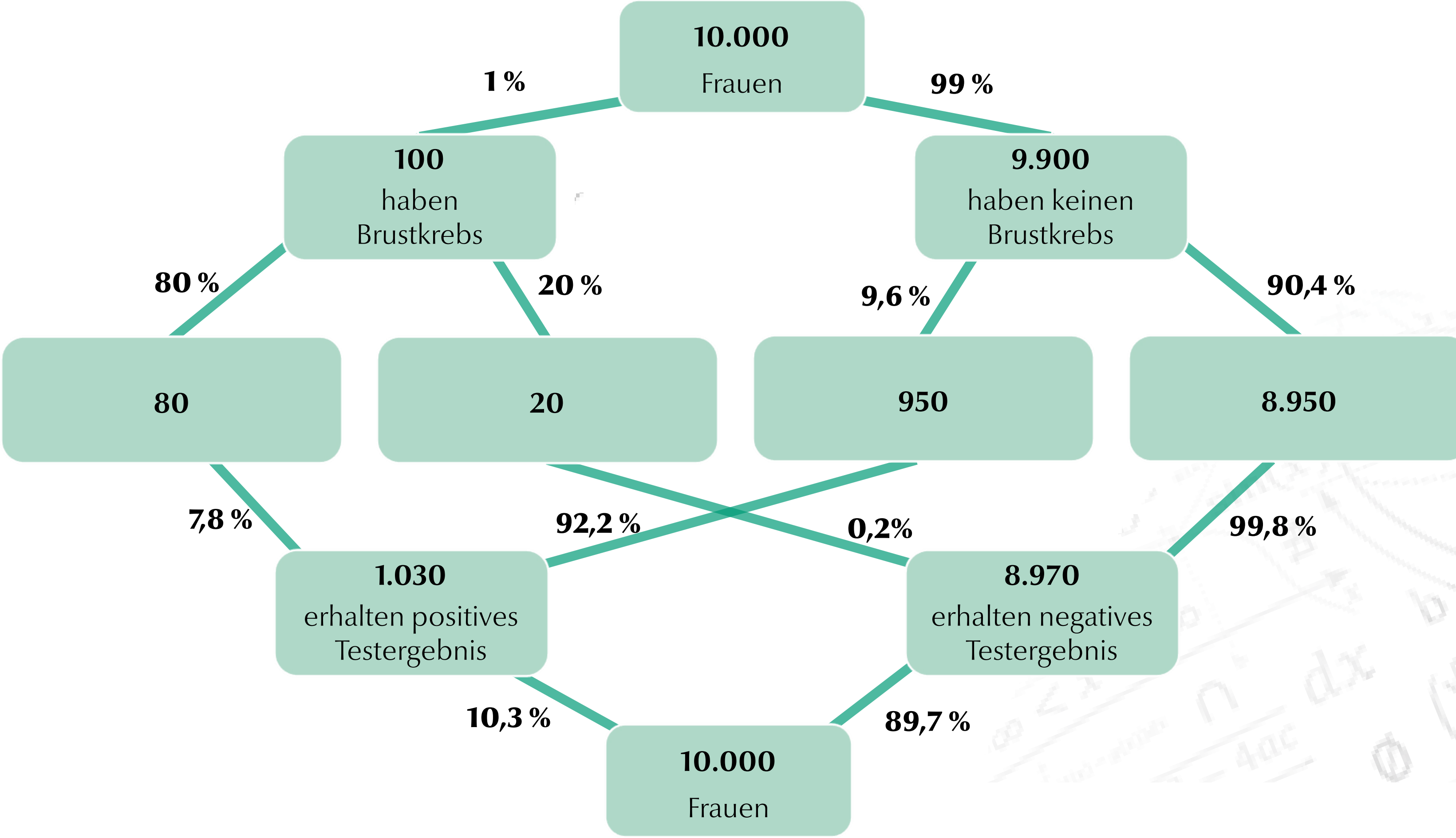


Es ist sehr aufwändig und kognitiv sehr anspruchsvoll, die gesuchten Wahrscheinlichkeiten zu erhalten (z.B. Pfadregeln, ehemals Satz von Bayes).

→ Eine Zusammenführung der Baumdiagramme ist erst dann möglich, wenn die Aufgabe bereits gelöst ist.

Ausbau von Idee 2

Hat man aber den Häufigkeitsdoppelbaum, können die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten ganz einfach ergänzt und *alle* Lösungen zu *allen möglichen* Aufgaben von innen „nach außen abgelesen“ werden!



Vorteile des Häufigkeitsdoppelbaums

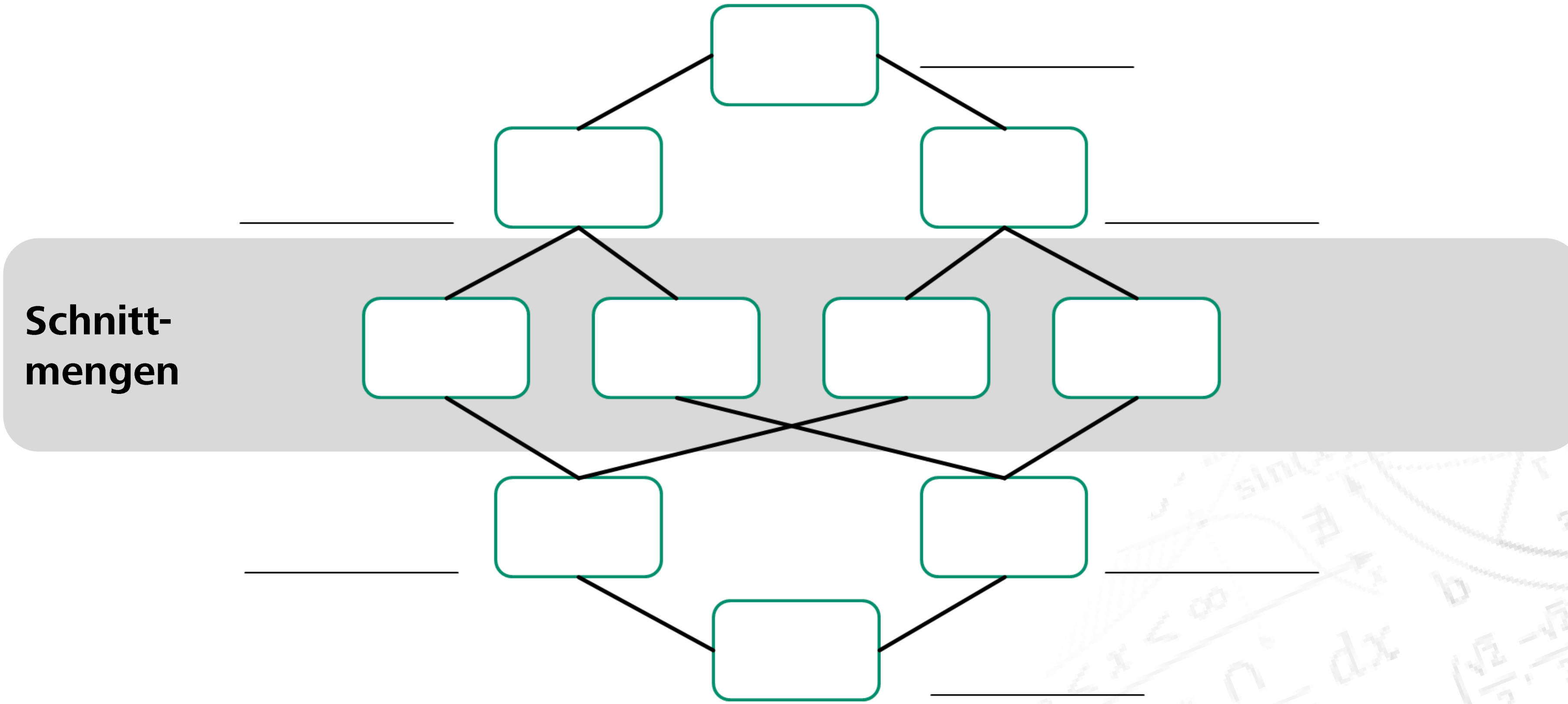
1) Sie sind sehr leicht zu konstruieren (in der Regel sind dazu drei Wahrscheinlichkeitsangaben ausreichend); „Wahrscheinlichkeitsdoppelbäume“ hingegen nicht.

2) Sie ermöglichen ein **vollständiges** Verständnis der Situation (und nicht nur die Berechnung einer singulären Wahrscheinlichkeit): *Alle* relevanten Wahrscheinlichkeiten können durch einfache Verhältnisbildung ganz leicht ergänzt und abgelesen werden.

3) *Vierfeldertafel*n mit absoluten und relativen Häufigkeiten unterscheiden sich dagegen nur durch die „Normierung“. Insbesondere enthalten Vierfeldertafeln mit relativen Häufigkeiten auch keine bedingten Wahrscheinlichkeiten. Diese lassen sich auch nicht ohne weiteres ergänzen (wo?), da die zugehörigen Zahlen nicht immer „benachbart“ sind. Weiterhin steht nur beim Baumdiagramm die jeweilige Bezeichnung direkt neben der entsprechenden Anzahl (für einen expliziten Vergleich beider Darstellungen mit absoluten Häufigkeiten siehe Dokument „Häufigkeitsdoppelbaum_Vierfeldertafel.docx“).

4) Weder der Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit noch die Pfadregeln sind zur Lösung von Aufgaben erforderlich! Man benötigt – auch zur Lösung von entsprechenden Abituraufgaben (!) – nur Wissen der Unterstufe (Bruchrechnen, Grundgleichung der Prozentrechnung, ggf. Lösen von Gleichungen).

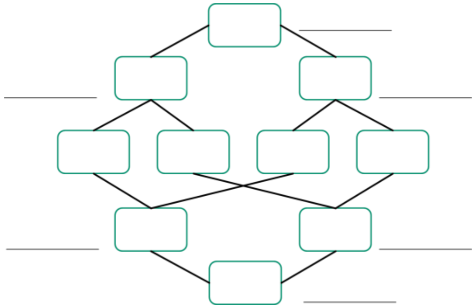
Heute: Konsequenter Ausbau des Häufigkeits(doppel)baumes zum didaktischen Werkzeug für den schulischen Stochastikunterricht von der Unterstufe bis zum Abitur



These 1: Der Doppelbaum mit absoluten („natürlichen") Häufigkeiten ist verständnisfördernd!
These 2: Mit dem Doppelbaum lassen sich sogar Abituraufgaben mit Wissen aus der Unterstufe lösen!

Beispiel 2

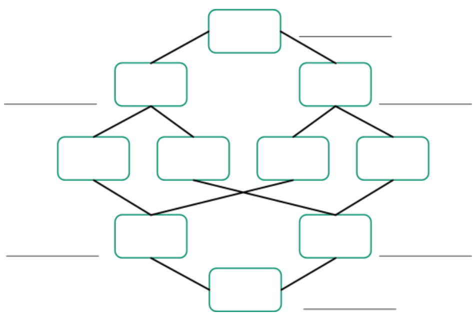
Prozentrechnung bekannt
(grob: Unterstufe)



Typische Aufgaben zu bedingten Wahrscheinlichkeiten, Pfadregeln, Vierfeldertafeln …

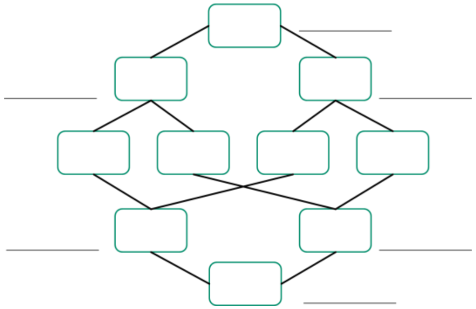
Beispiel 1

(bedingte)
Wahrscheinlichkeit bekannt
(grob: Mittelstufe)



Beispiele 3 und 4

Abituraufgaben
(grob: Oberstufe)



Typische Situation von der Unterstufe bis zum Abitur: **Zwei Merkmale** mit jeweils **zwei Ausprägungsmöglichkeiten**

Beispiel 1

- Lehrer oder Schüler (Merkmal 1: „Status an der Schule“)
- Weiblich oder männlich (Merkmal 2: „Geschlecht der Person“)

Beispiel 2

- Krank oder gesund (Merkmal 1: „Gesundheitszustand“)
- Test positiv oder Test negativ (Merkmal 2: „medizinisches Testergebnis“)

→ Je nach Klassenstufe und abhängig davon, ob der Prozentbegriff oder der Begriff der (bedingten) Wahrscheinlichkeit bereits eingeführt wurde, lassen sich hierzu nun verschiedenste Aufgaben formulieren.

→ Prinzipiell lassen sich alle Aufgaben dieser Art in natürliche Häufigkeiten übersetzen – dies gilt *sowohl* für die Fragestellung *als auch* für die Informationen in der Aufgabe! Dabei ist es ggfs. notwendig, sich eine **„imaginäre“ Stichprobe** auszudenken!

Universität Regensburg

Für die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_B(A)$ bedeutet das in den verschiedenen Darstellungen:

	Wahrscheinlichkeit		Anteil	
Darstellung	Brüche	Prozent	Prozent	Natürliche Häufigkeiten
Information	0,25 bzw. 1/4	25 %	25%	1 von 4
Frage (allgemein)	Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B?		Wie groß ist der Anteil der A unter den B?	Wie viele der B sind A?
Beispiel	Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dass eine Person weiblich ist, wenn sie eine Lehrperson ist?		Wie groß ist der Anteil der Frauen unter den Lehrpersonen?	Wie viele der Lehrpersonen sind weiblich?

Universität Regensburg

Welche Fragen kann man (je nach Darstellung) in solchen Situationen überhaupt stellen?

Für Wahrscheinlichkeiten gibt es z.B.:

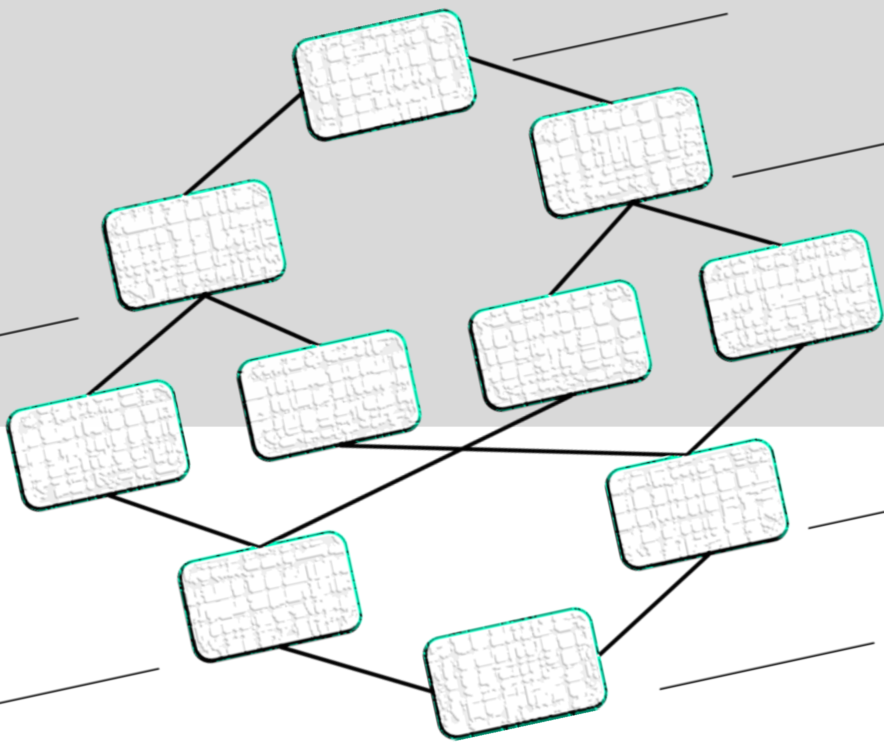
4 (a-priori) Wahrscheinlichkeiten: $P(A)$, $P(\overline{A})$, $P(B)$, $P(\overline{B})$

8 bedingte Wahrscheinlichkeiten: $P(A|B)$, $P(\overline{A}|B)$, $P(A|\overline{B})$, $P(\overline{A}|\overline{B})$, $P(B|A)$, $P(\overline{B}|A)$, $P(B|\overline{A})$; $P(\overline{B}|\overline{A})$

4 Wahrscheinlichkeiten von Schnittmengen: $P(A \cap B)$, $P(A \cap \overline{B})$, $P(\overline{A} \cap B)$, $P(\overline{A} \cap \overline{B})$

…

Alle diese Wahrscheinlichkeiten (bzw. Anteile bzw. natürliche Häufigkeiten) lassen sich schlicht aus dem Doppelbaum **ablesen**!



Beispiel 1

Der Häufigkeitsdoppelbaum ▪ Beispiel 1 (z.B. Klasse 6)

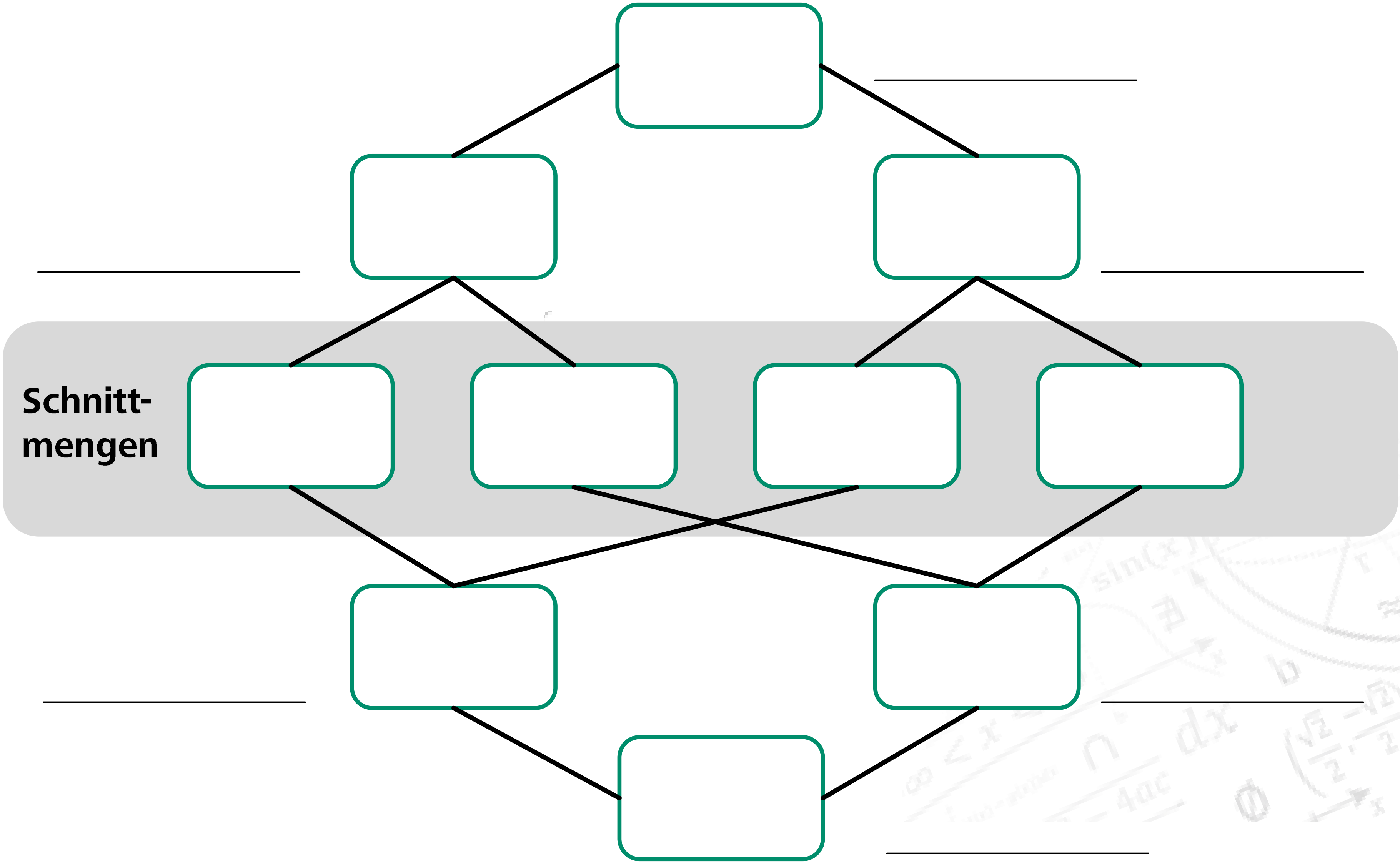
- 5 % der Personen an der Schule sind Lehrkräfte.
- 40 % der Lehrkräfte sind männlich.
- Insgesamt sind an der Schule 62 % der Personen männlich.

➡ Zwei Merkmale mit zwei Merkmalsausprägungen:
1. Merkmal: Geschlecht – männlich vs. weiblich,
2. Merkmal: Status an der Schule – Lehrer vs. Schüler

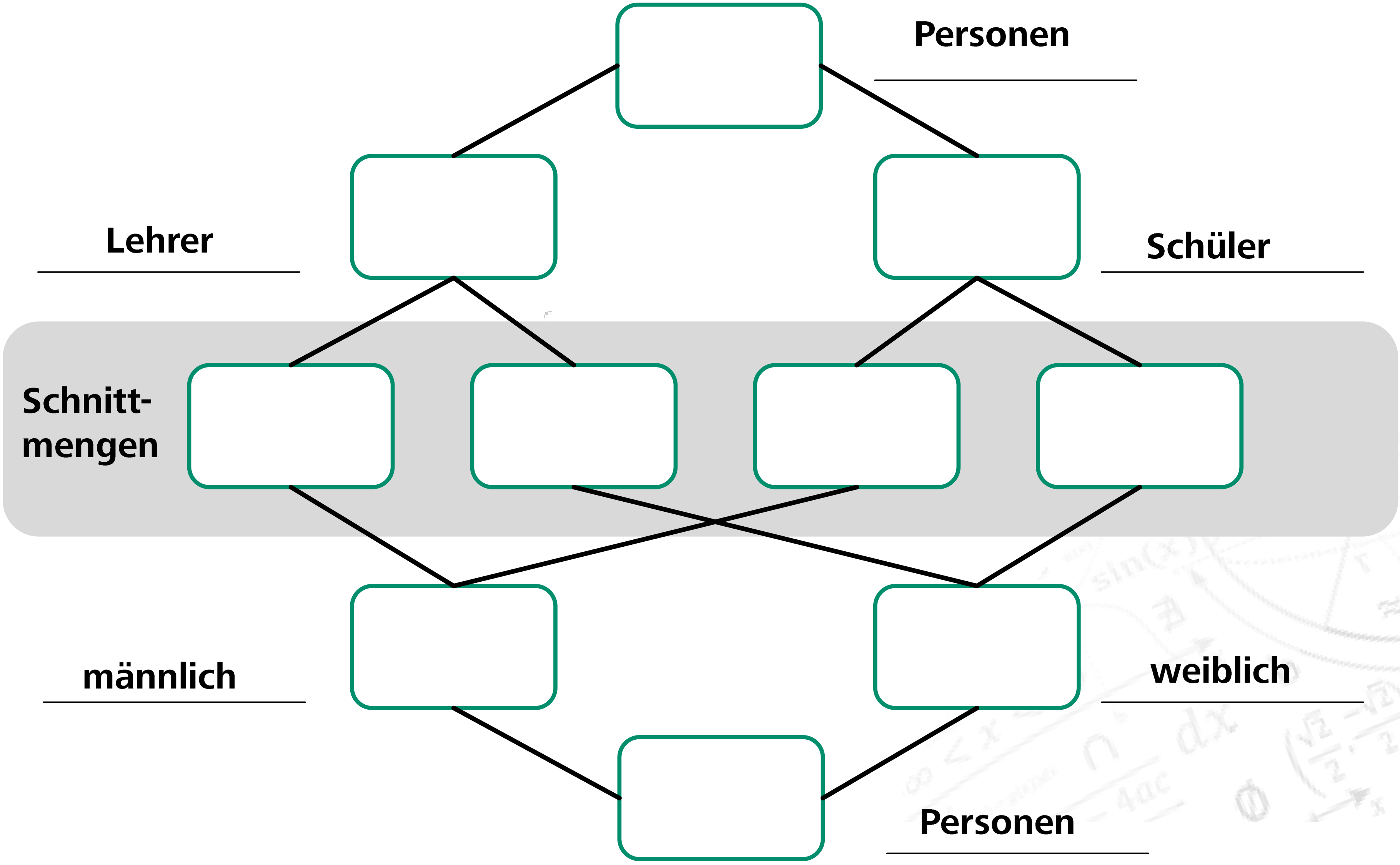
Im Folgenden beantworten wir immer gleichzeitig die folgenden drei (äquivalenten) Fragen:

I. Wie viele der Lehrkräfte sind männlich? (Natürliche Häufigkeiten)
II. Welcher Anteil (wie viel Prozent) der Lehrkräfte ist männlich? (Anteil)
III. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um eine Lehrkraft handelt, wenn bekannt ist, dass die Person männlich ist? (Bedingte Wahrscheinlichkeit)

Schritt 1 ■ Zeichnen der Struktur

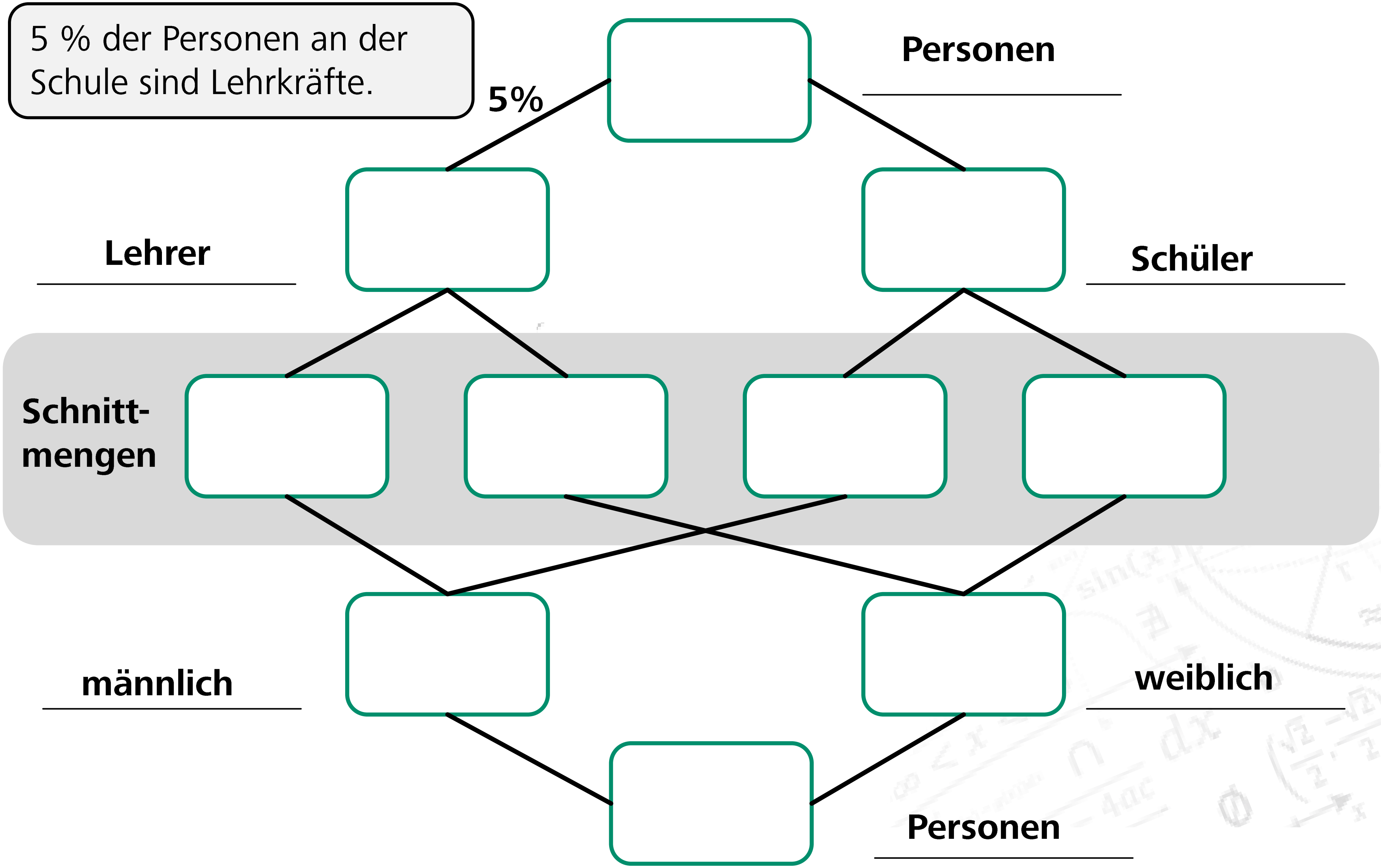


Schritt 2 ▪ Beschriften des Baums



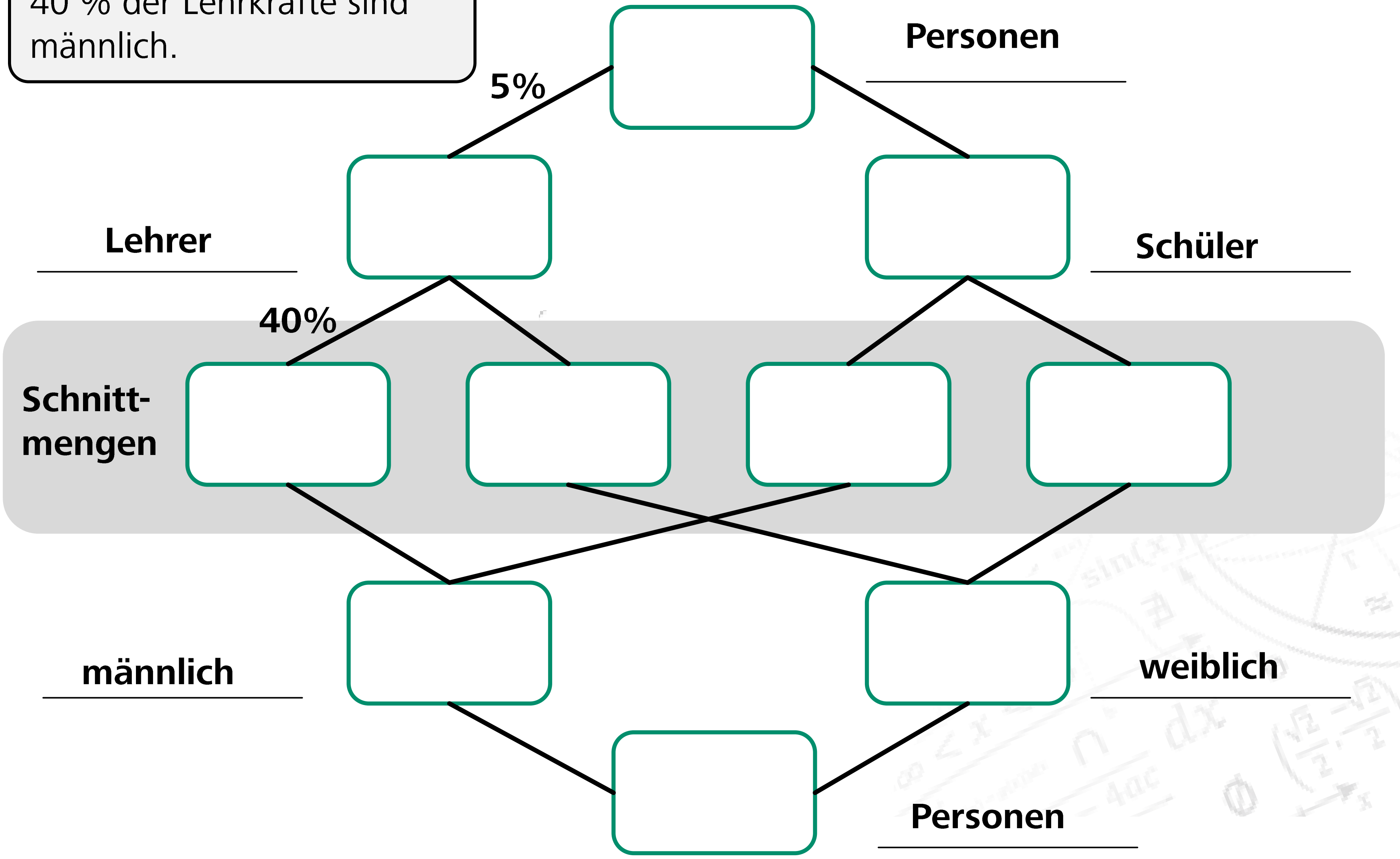
Schritt 3 ▪ Trage alle Informationen aus der Aufgabe ein

5 % der Personen an der Schule sind Lehrkräfte.



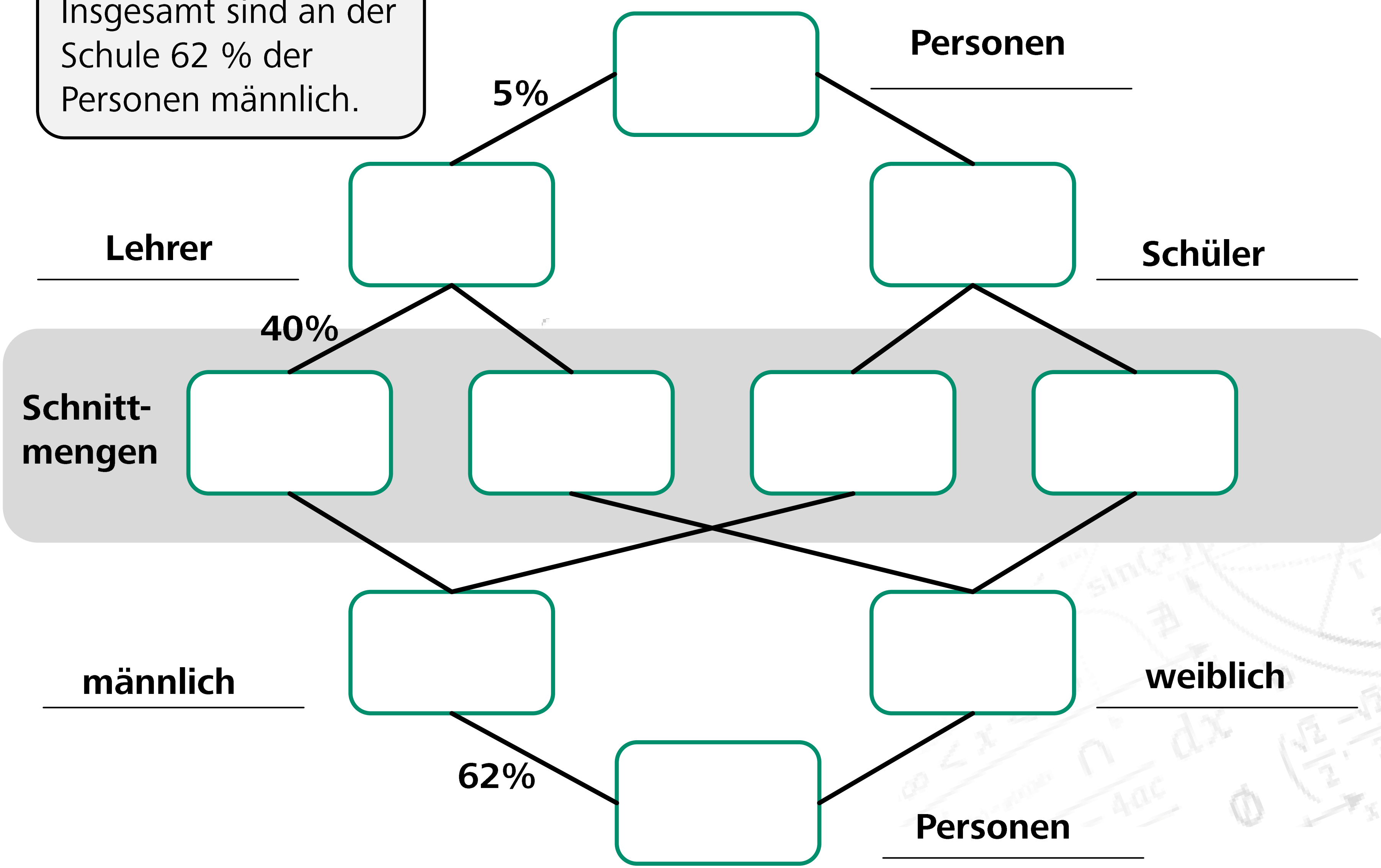
Schritt 3 ▪ Trage alle Informationen aus der Aufgabe ein

40 % der Lehrkräfte sind männlich.

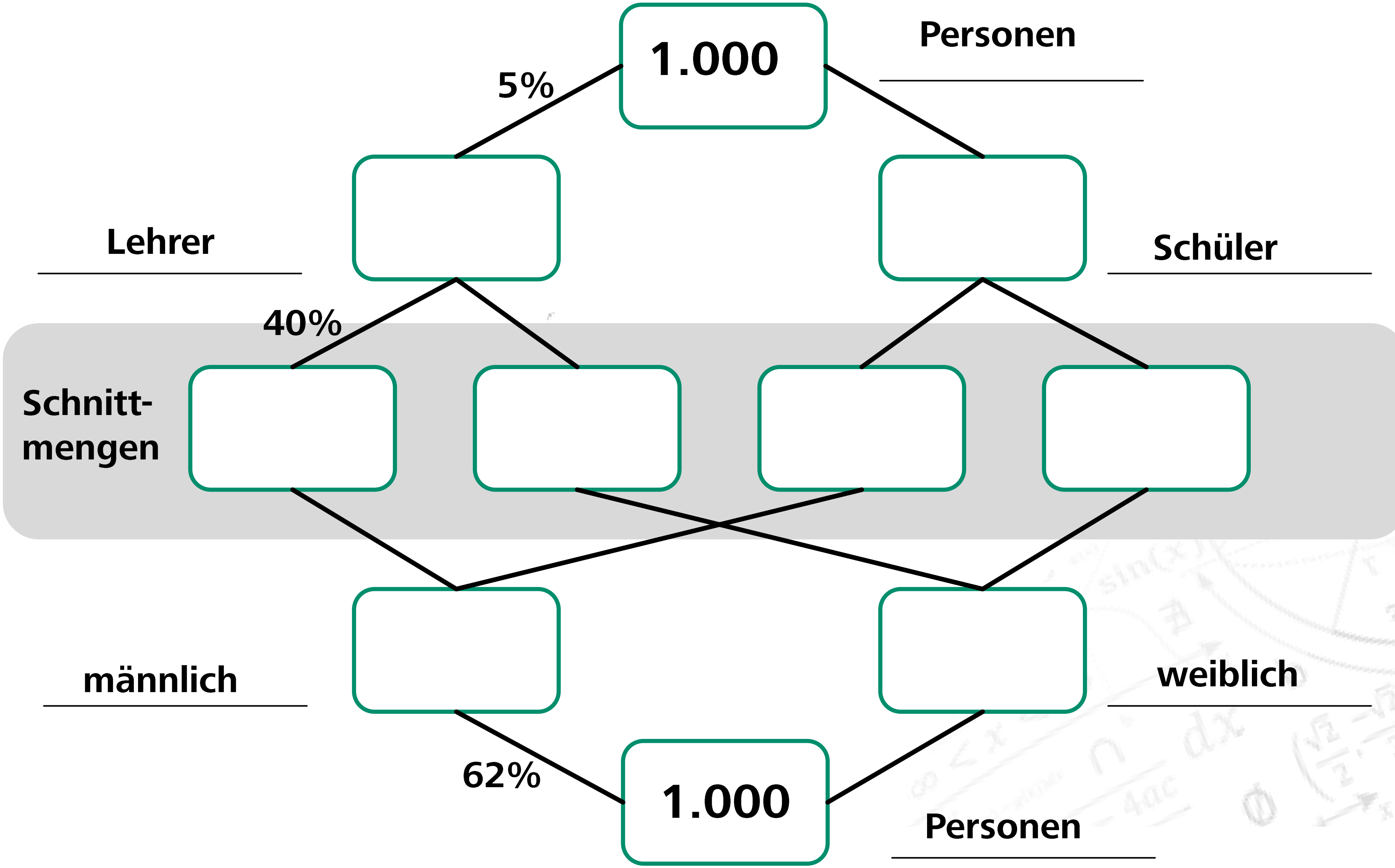


Schritt 3 ▪ Trage alle Informationen aus der Aufgabe ein

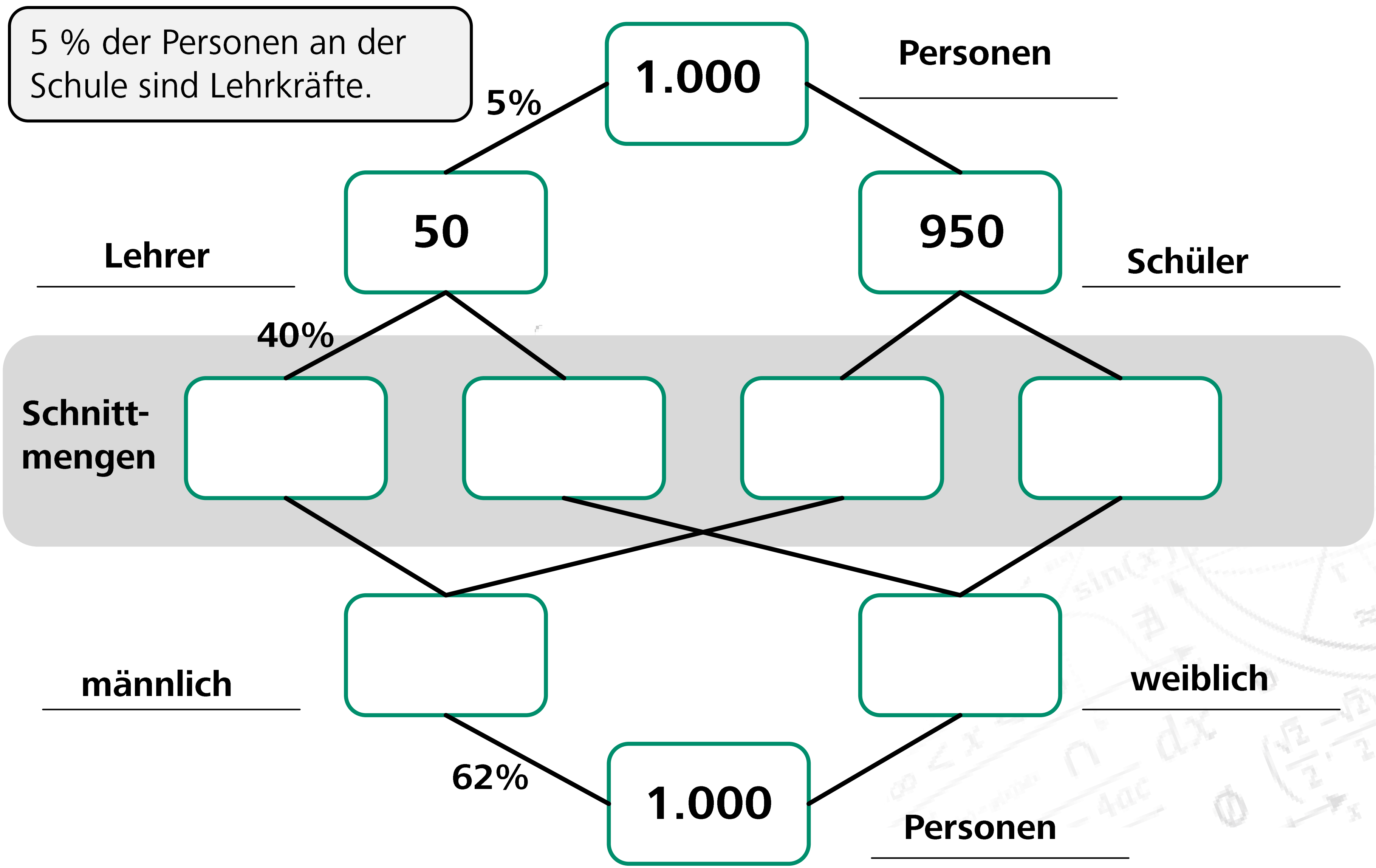
Insgesamt sind an der Schule 62 % der Personen männlich.



Schritt 4 ▪ Wahl einer (imaginären) Stichprobe

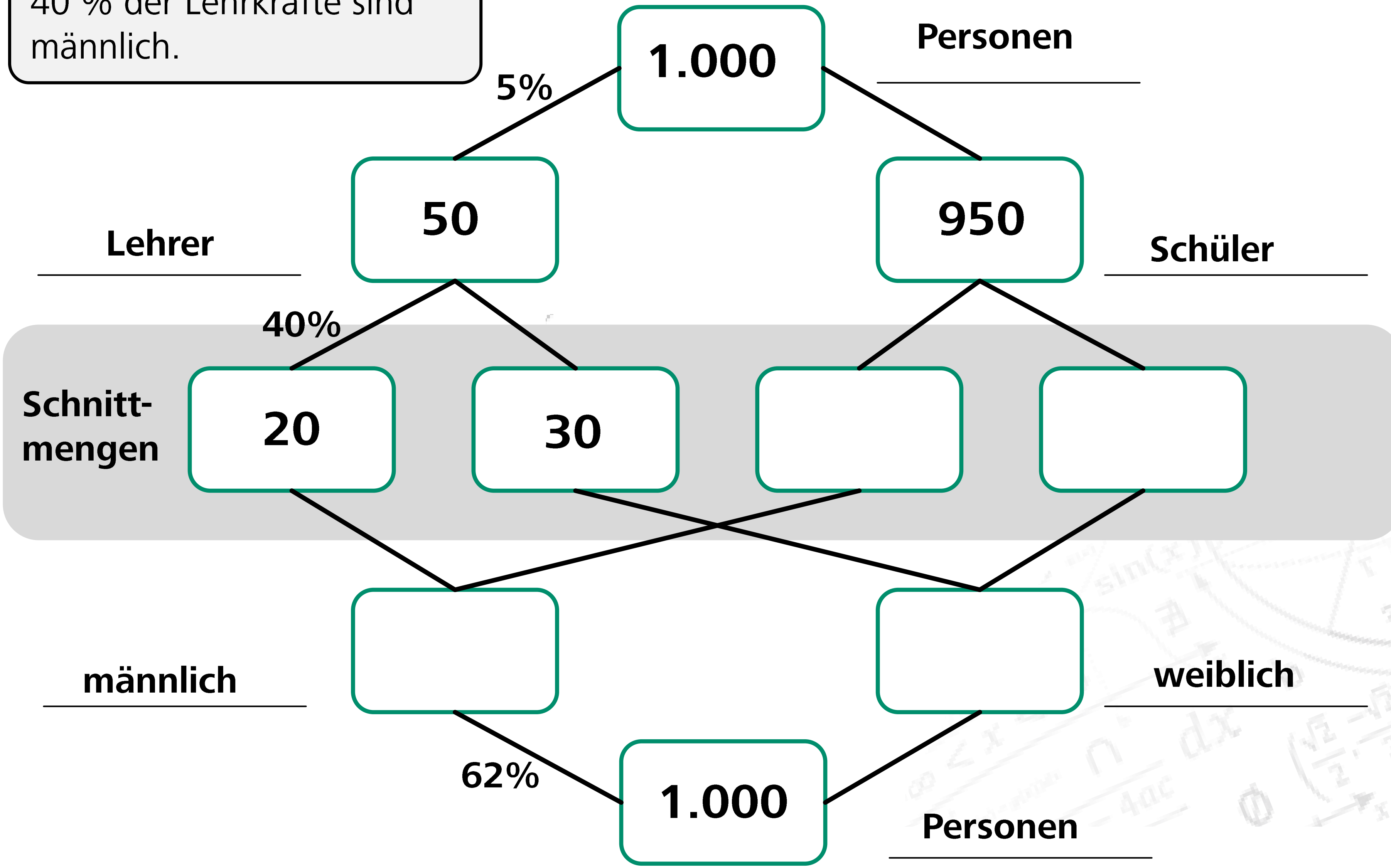


Schritt 5 ▪ Was bedeuten die Informationen für die Stichprobe?



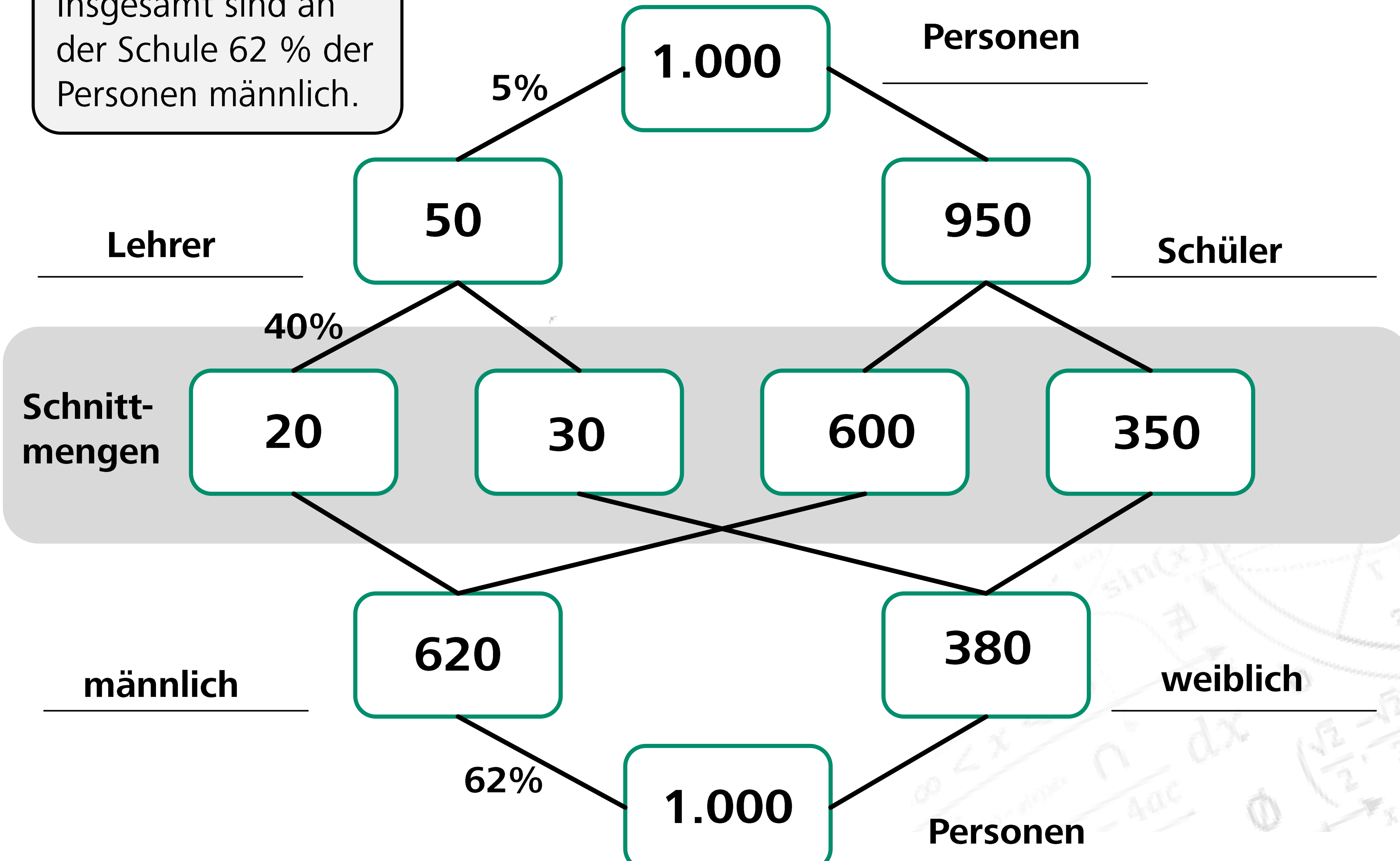
Schritt 5 ▪ Was bedeuten die Informationen für die Stichprobe?

40 % der Lehrkräfte sind männlich.



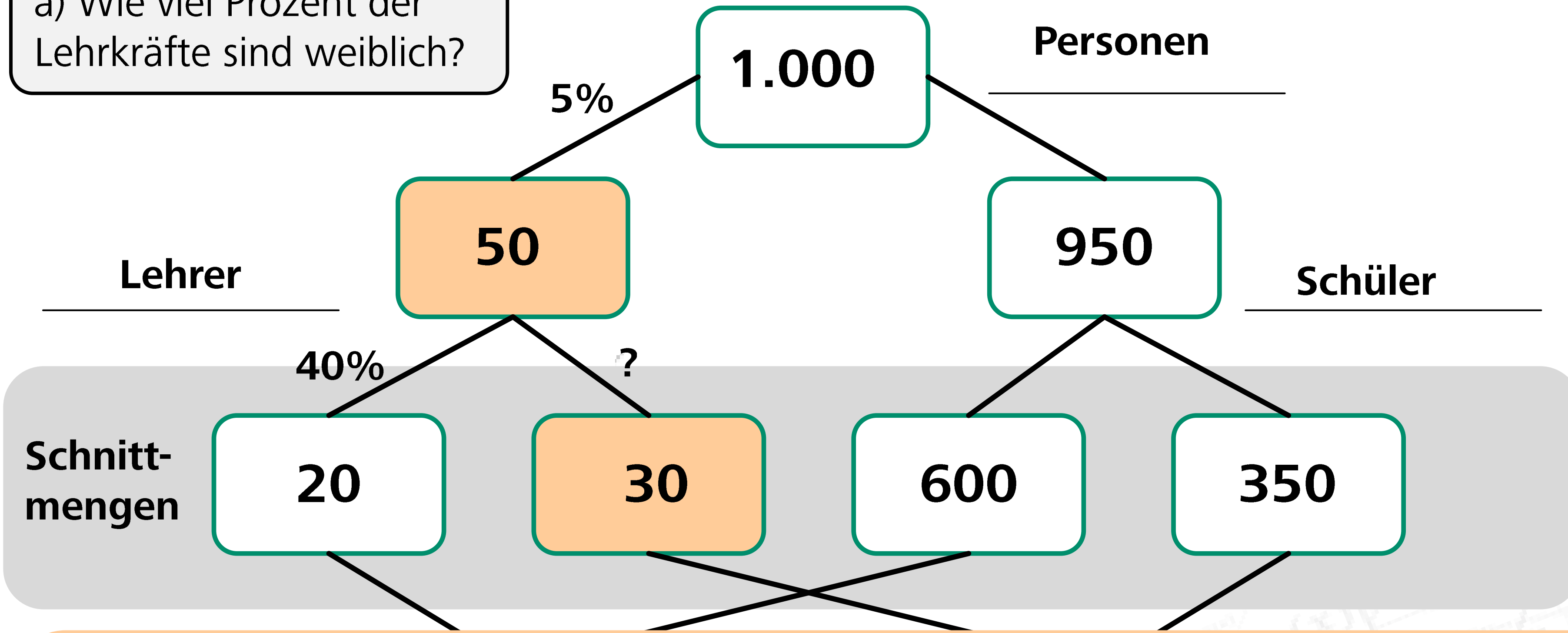
Schritt 5 ▪ Was bedeuten die Informationen für die Stichprobe?

Insgesamt sind an der Schule 62 % der Personen männlich.



Schritt 6 ▪ Antworten auf mögliche Fragen ablesen

a) Wie viel Prozent der Lehrkräfte sind weiblich?



Antwort:

I: 30 von 50 Lehrkräften sind weiblich.

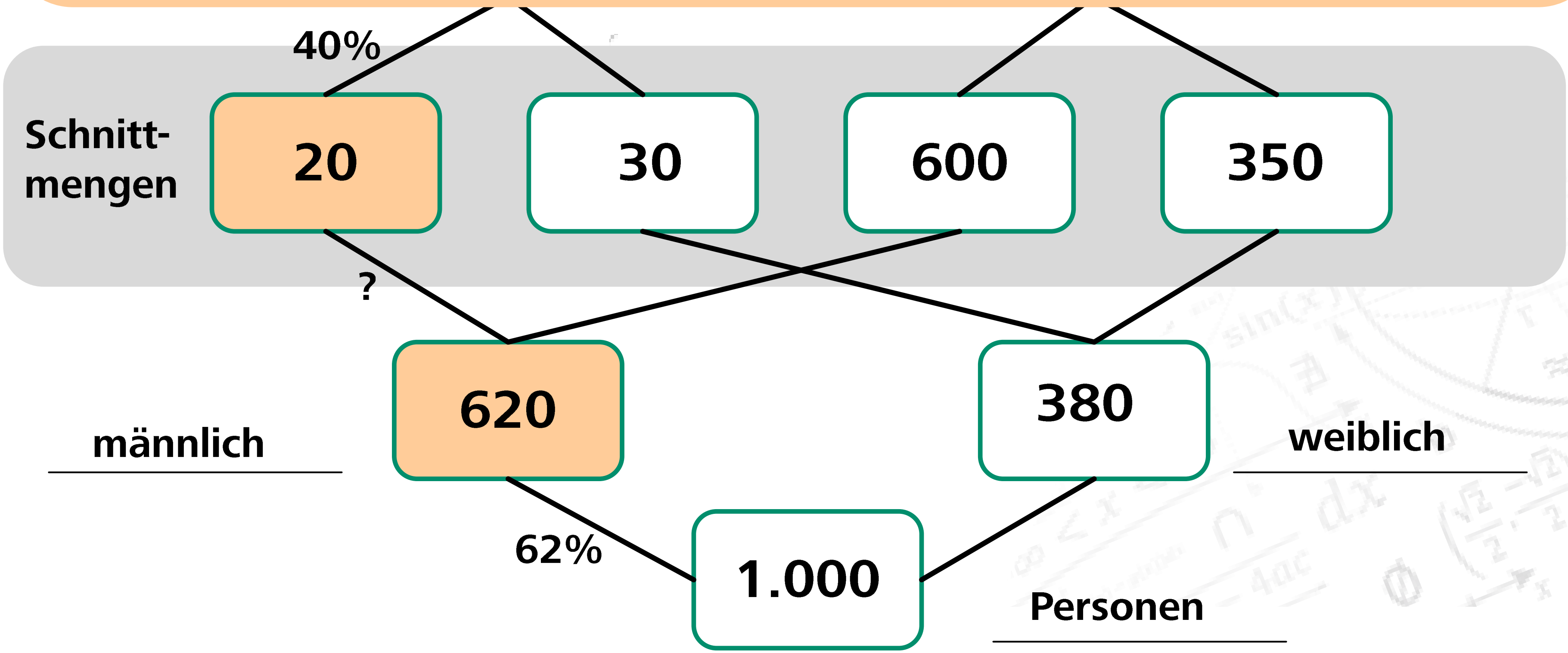
II: Der Anteil der Frauen unter den Lehrkräften beträgt 30/50 bzw. 60 %.

III: Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgesuchte Lehrkraft weiblich ist, beträgt 60 %.

Schritt 6 ▪ Antworten ablesen

b) Wie groß ist die Wahrschein-

Antwort:
I: 20 von 620 männlichen Personen sind Lehrkräfte.
II: Der Anteil der Lehrkräfte unter den männlichen Personen beträgt 20/620 bzw. 3,2 %.
III: Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgesuchte männliche Person eine Lehrkraft ist, beträgt 3,2 %.



Beispiel 2

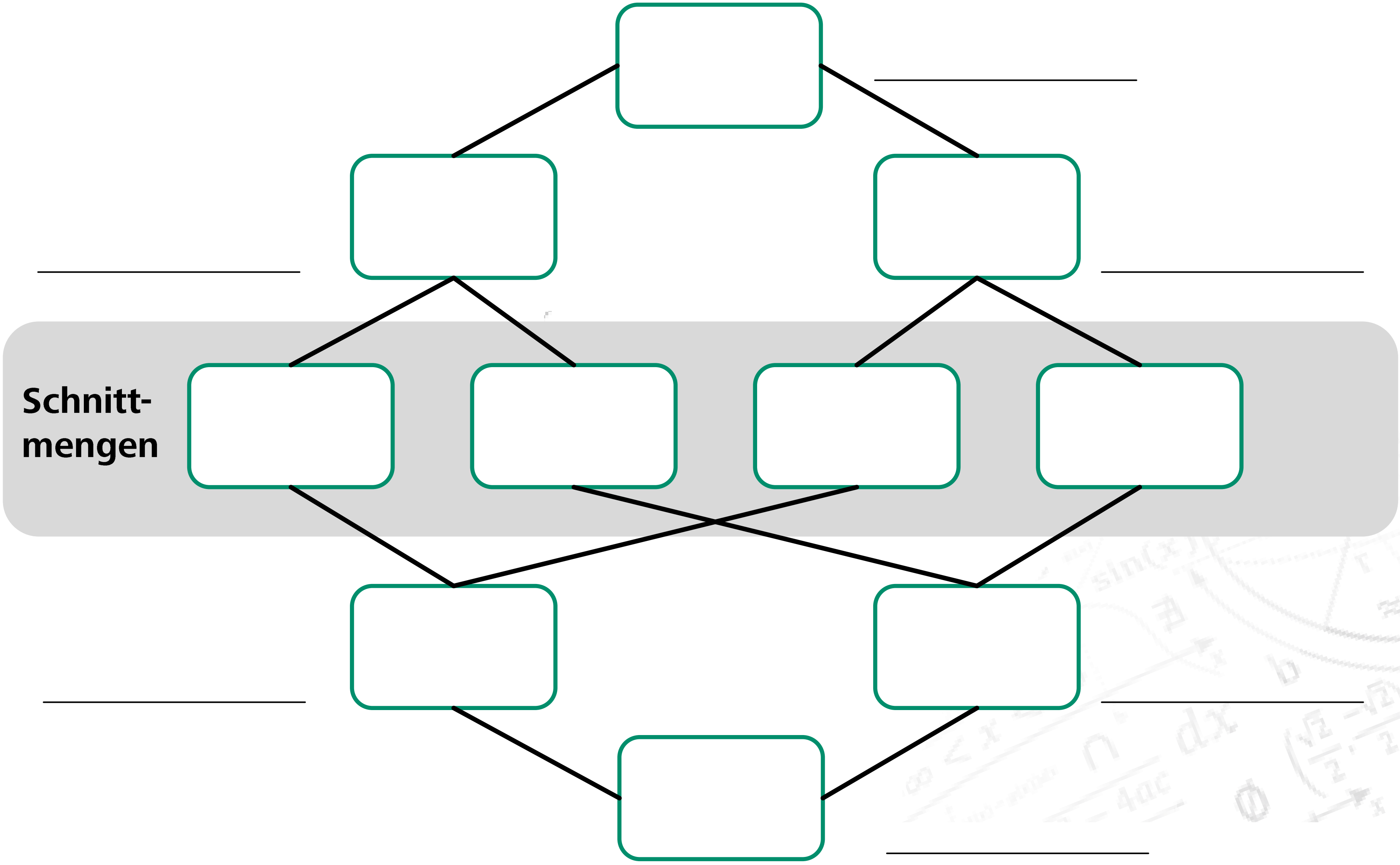
Aufgabe aus der Unterstufe

Am Beethoven-Gymnasium beträgt der Anteil der Mädchen 45 %.

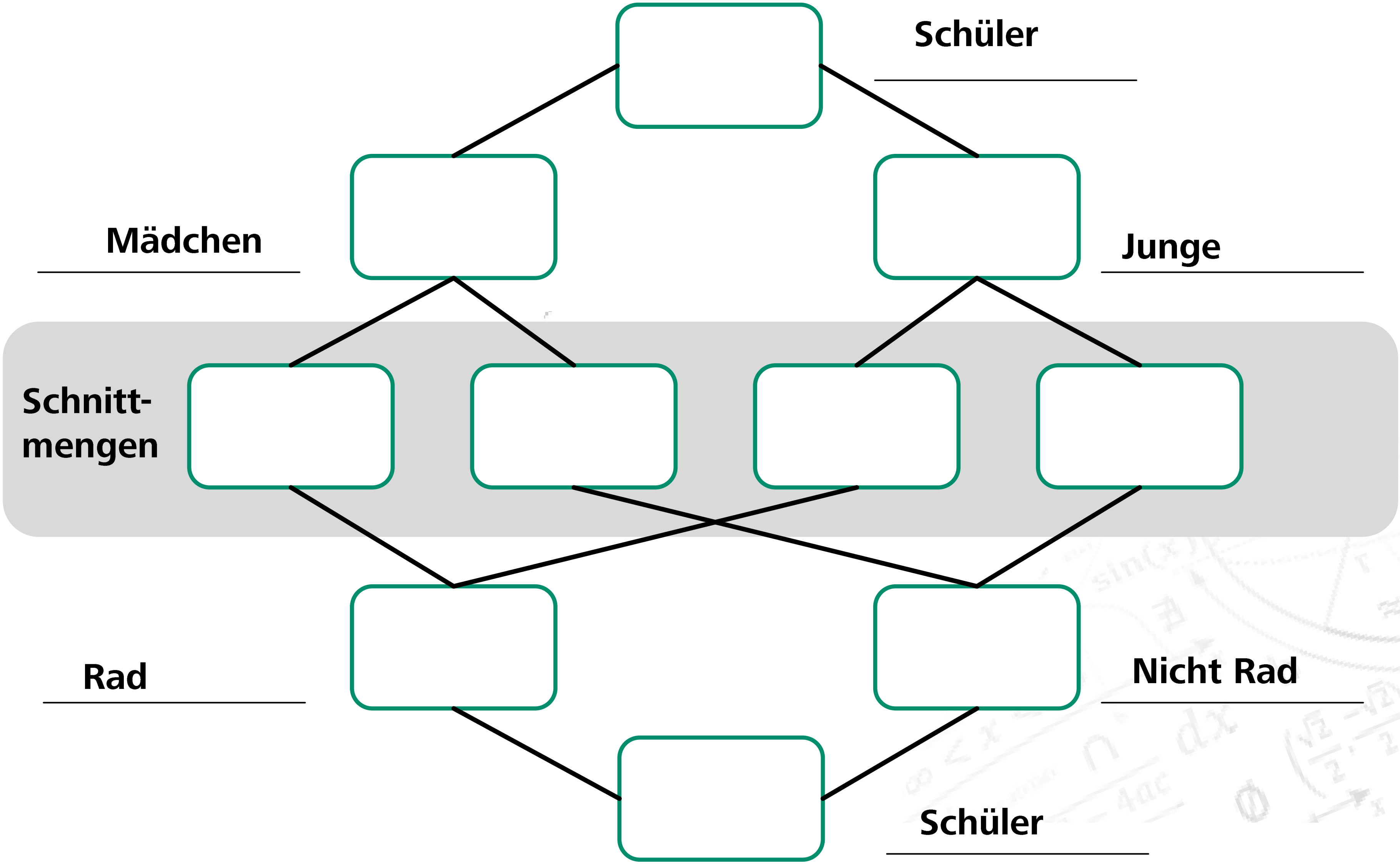
28 % der Mädchen und 36 % der Jungen kommen gewöhnlich mit dem Rad zur Schule.

Aufgabe (z.B.):
Welcher Prozentsatz aller Schüler nimmt für den Schulweg das Rad?

Schritt 1 ▪ Zeichnen der Struktur

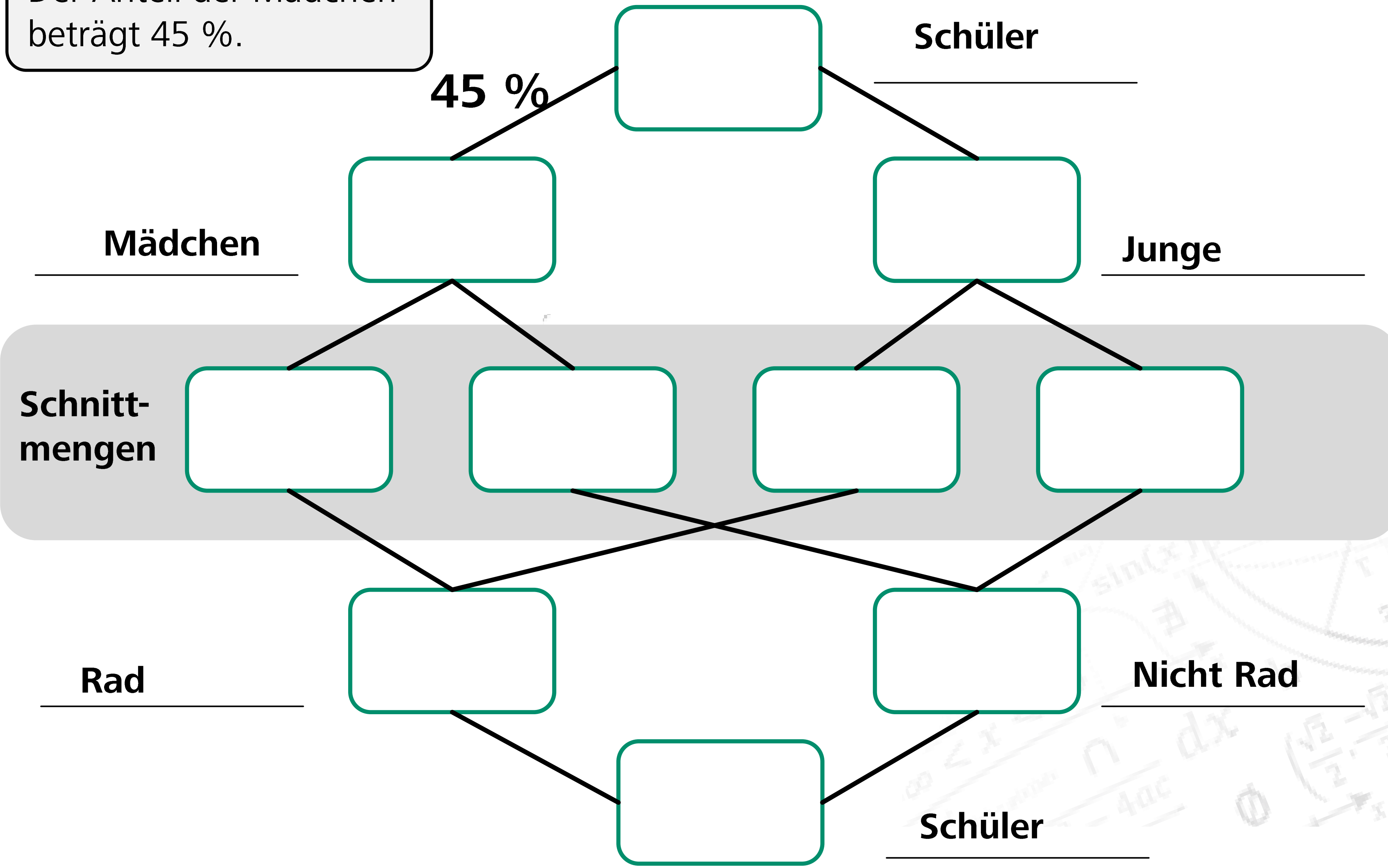


Schritt 2 ▪ Beschriften des Baums



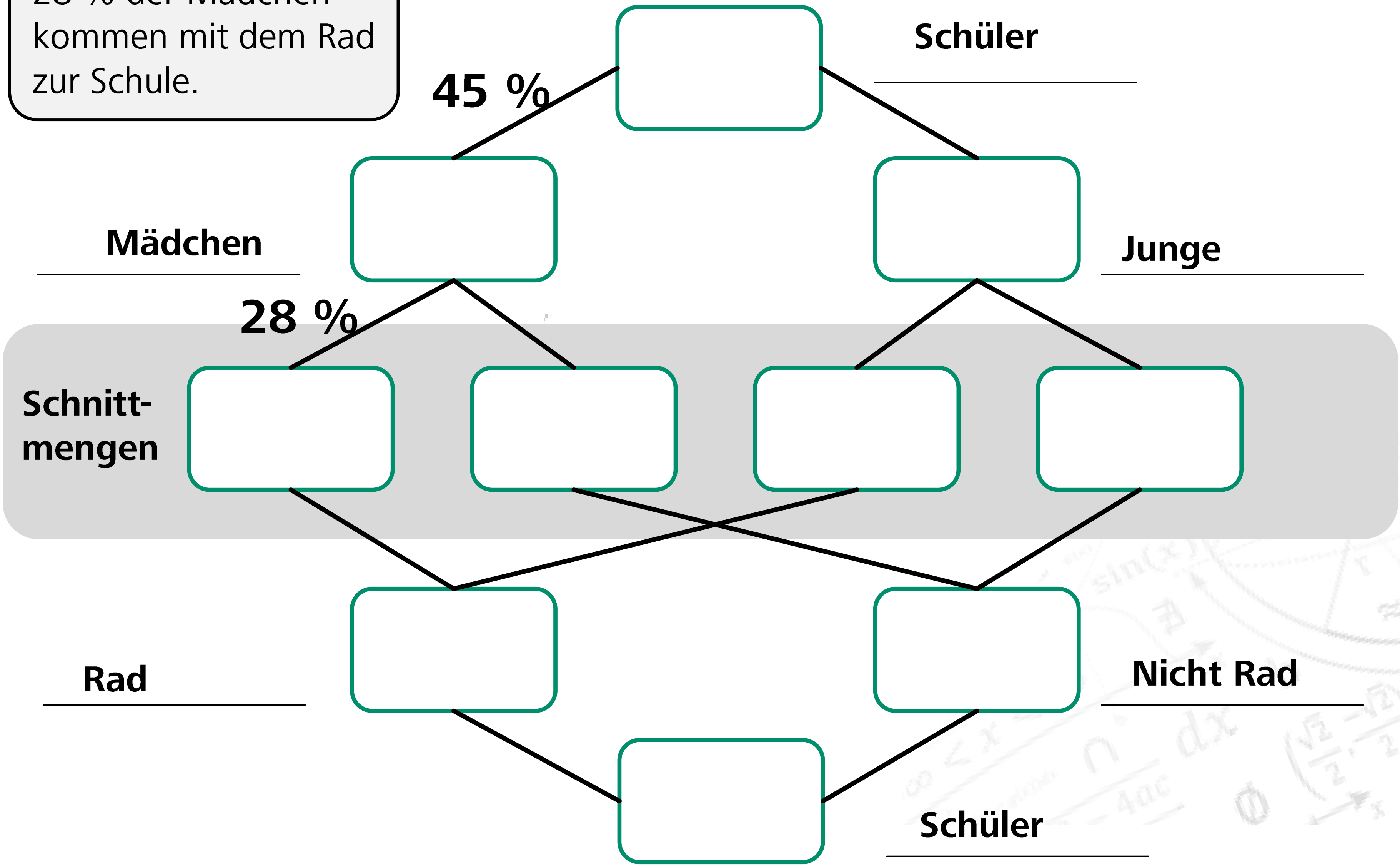
Schritt 3 ▪ Trage alle Informationen aus der Aufgabe ein

Der Anteil der Mädchen beträgt 45 %.



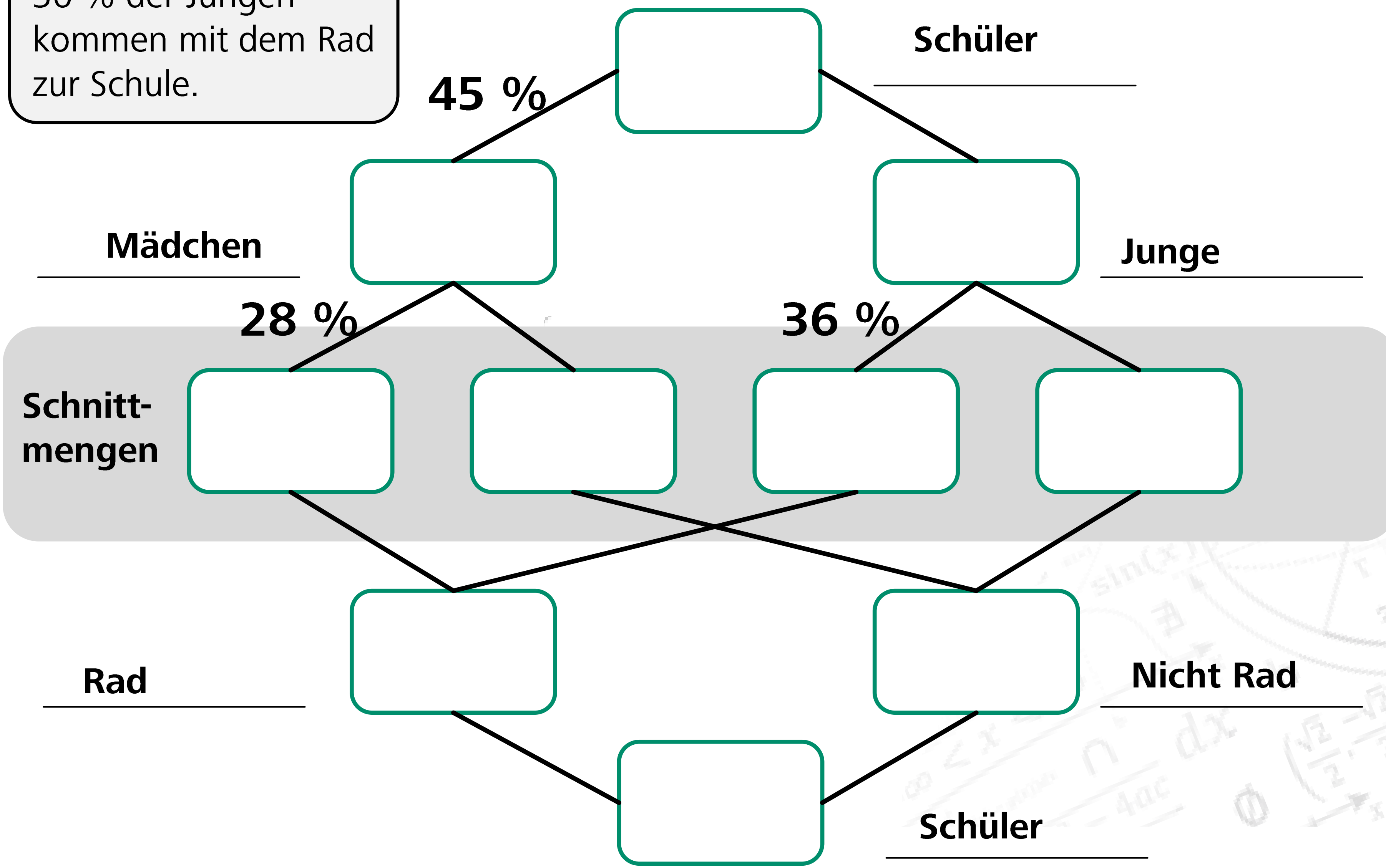
Schritt 3 ▪ Trage alle Informationen aus der Aufgabe ein

28 % der Mädchen kommen mit dem Rad zur Schule.

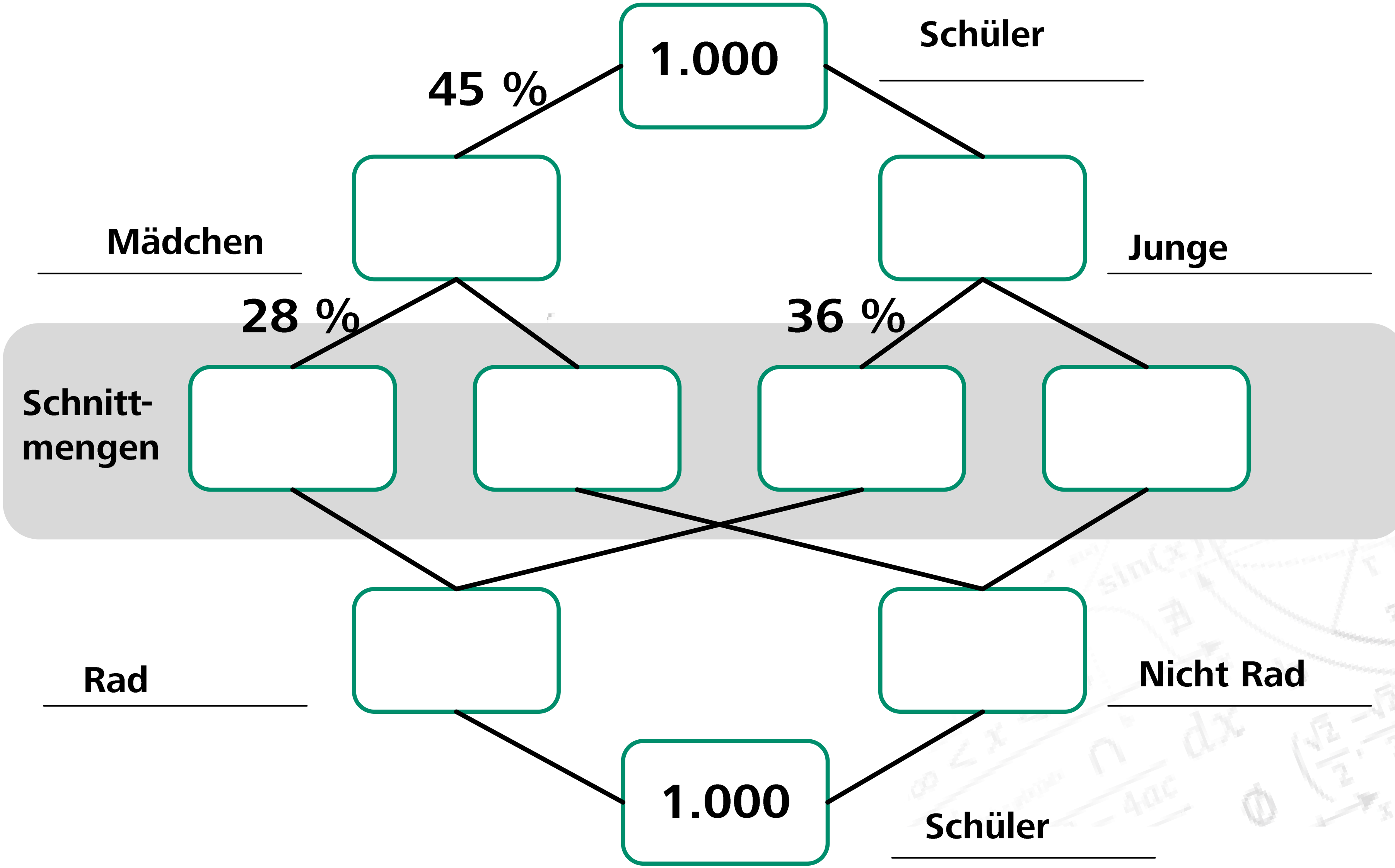


Schritt 3 ▪ Trage alle Informationen aus der Aufgabe ein

36 % der Jungen kommen mit dem Rad zur Schule.

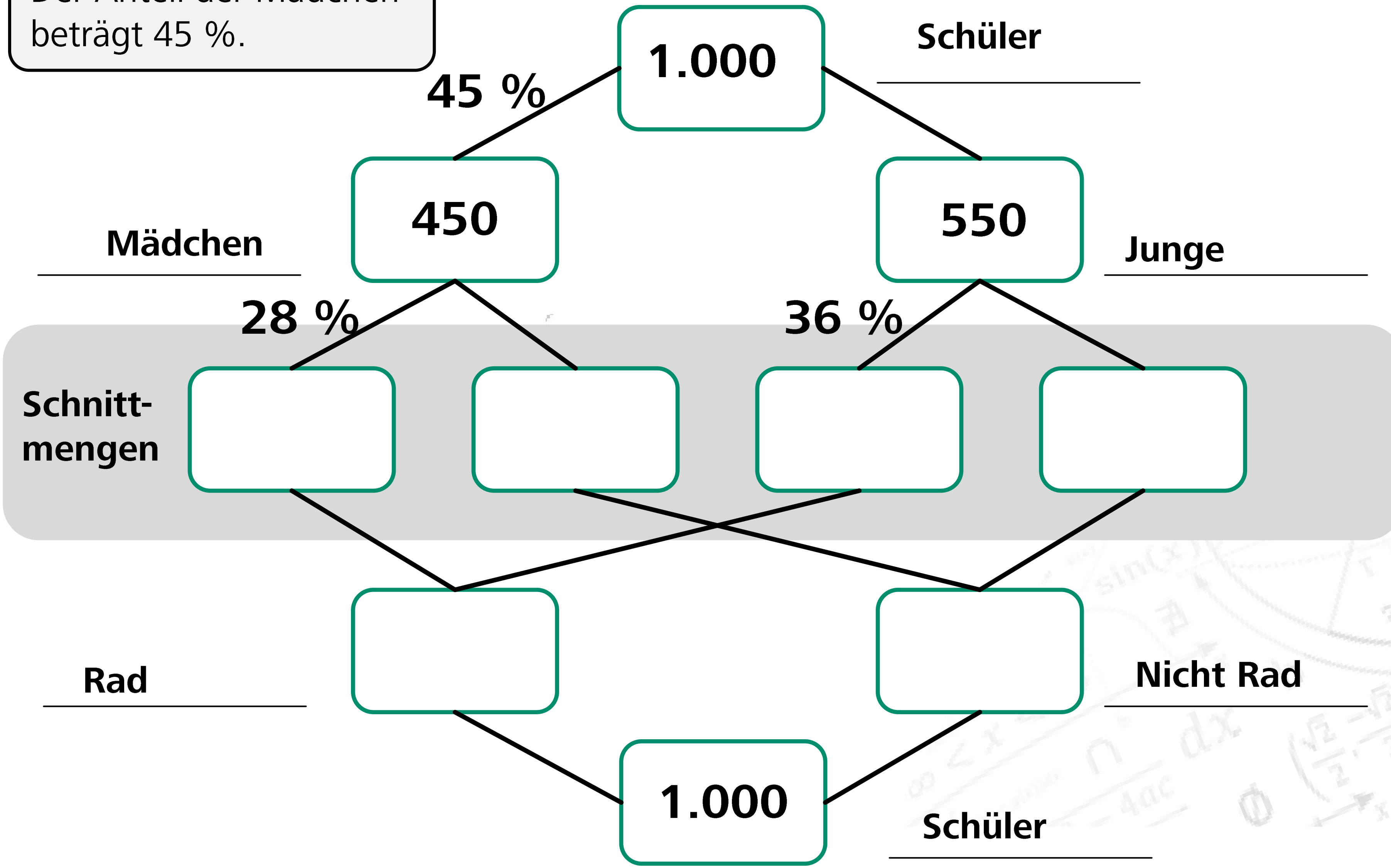


Schritt 4 ▪ Wahl einer (imaginären) Stichprobe



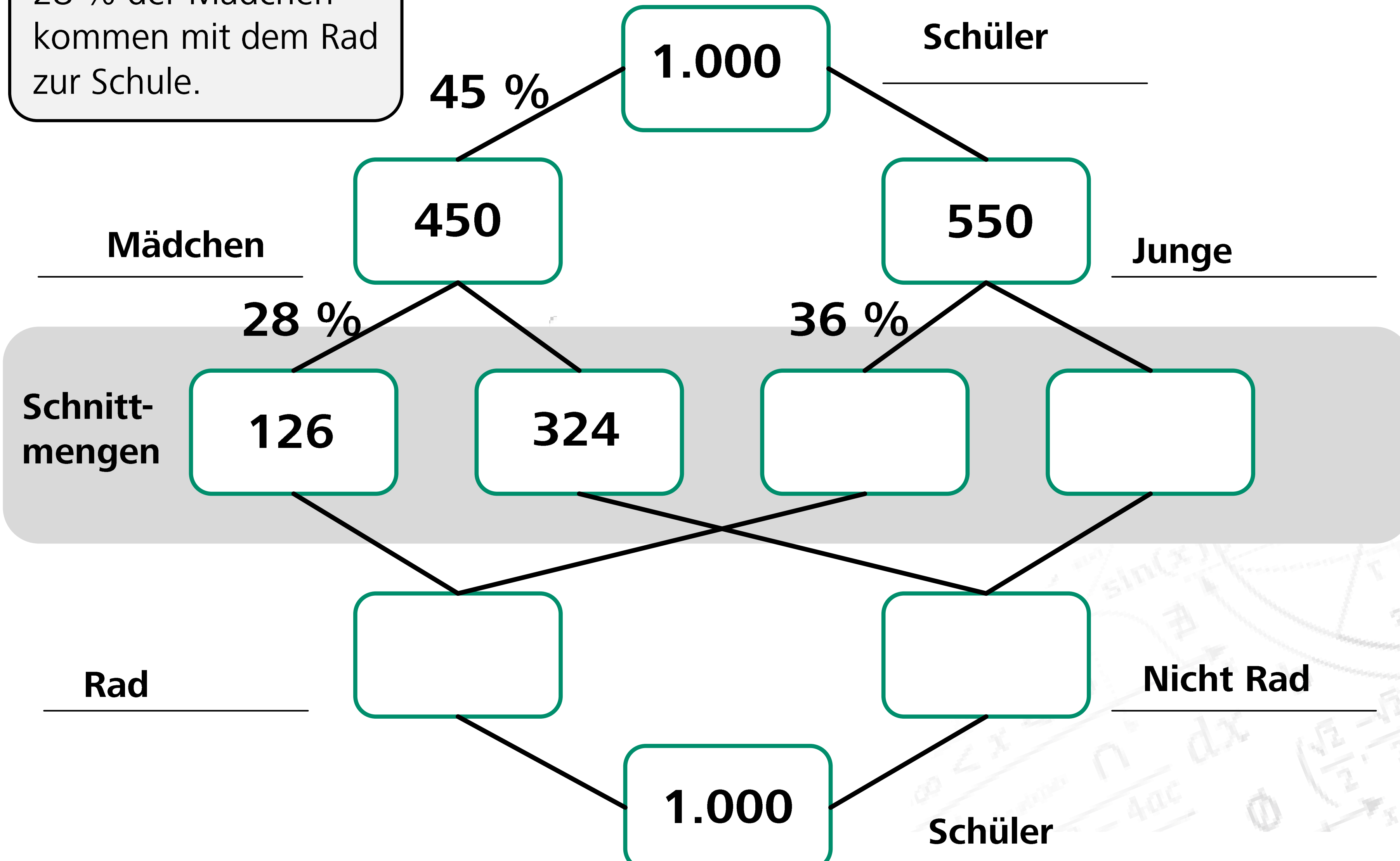
Schritt 5 ▪ Was bedeuten die Informationen für die Stichprobe?

Der Anteil der Mädchen beträgt 45 %.



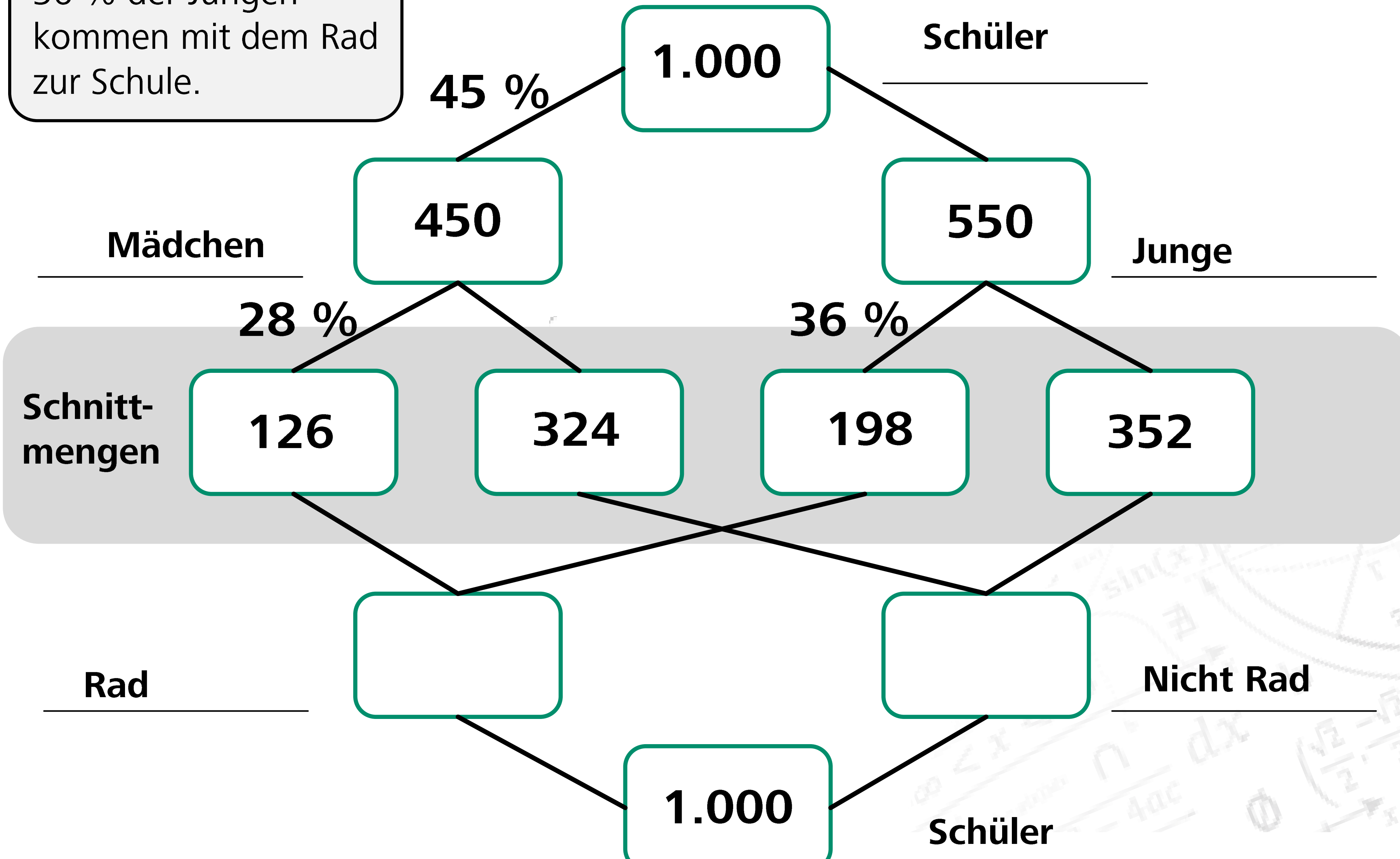
Schritt 5 ▪ Was bedeuten die Informationen für die Stichprobe?

28 % der Mädchen kommen mit dem Rad zur Schule.



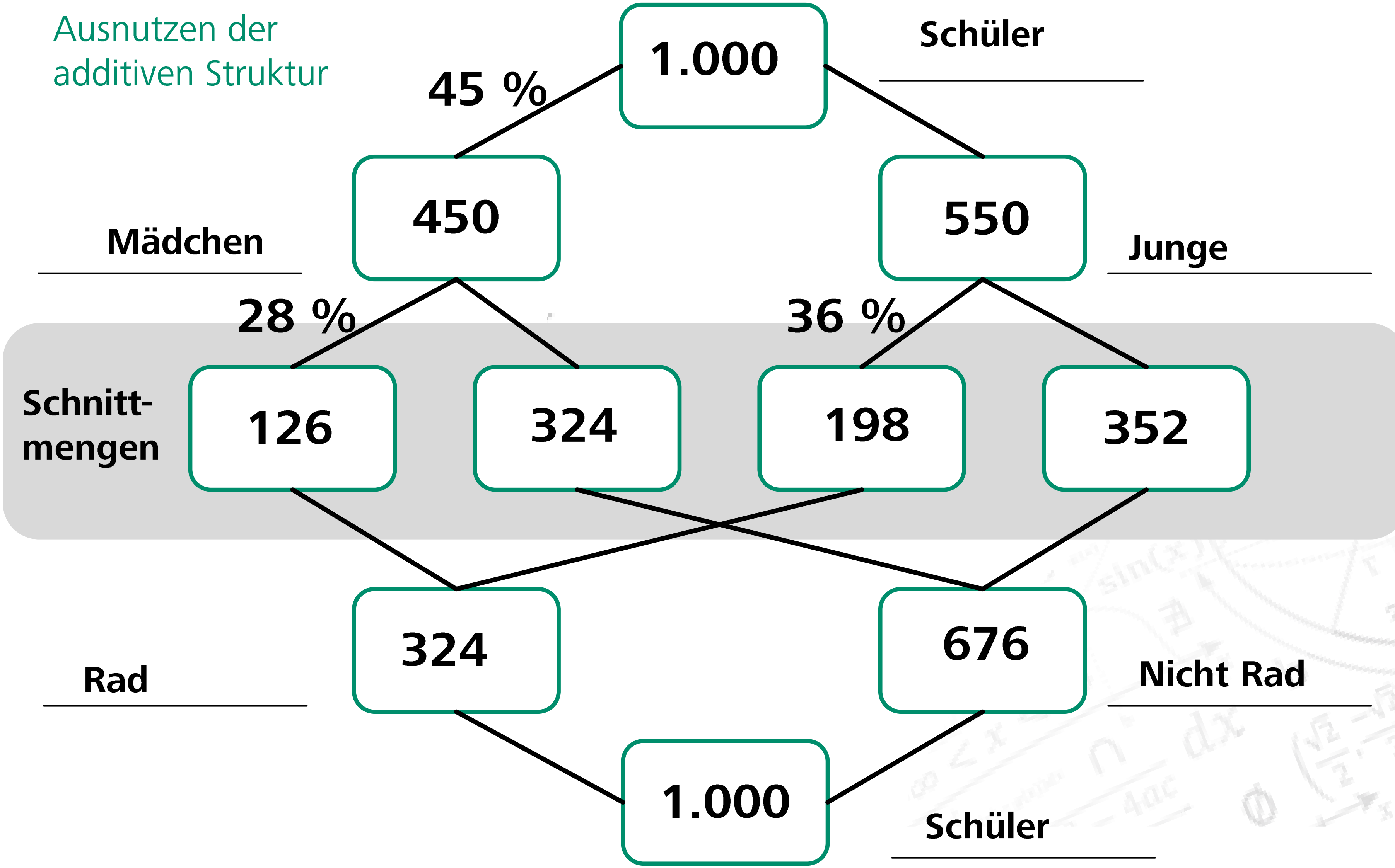
Schritt 5 ▪ Was bedeuten die Informationen für die Stichprobe?

36 % der Jungen kommen mit dem Rad zur Schule.



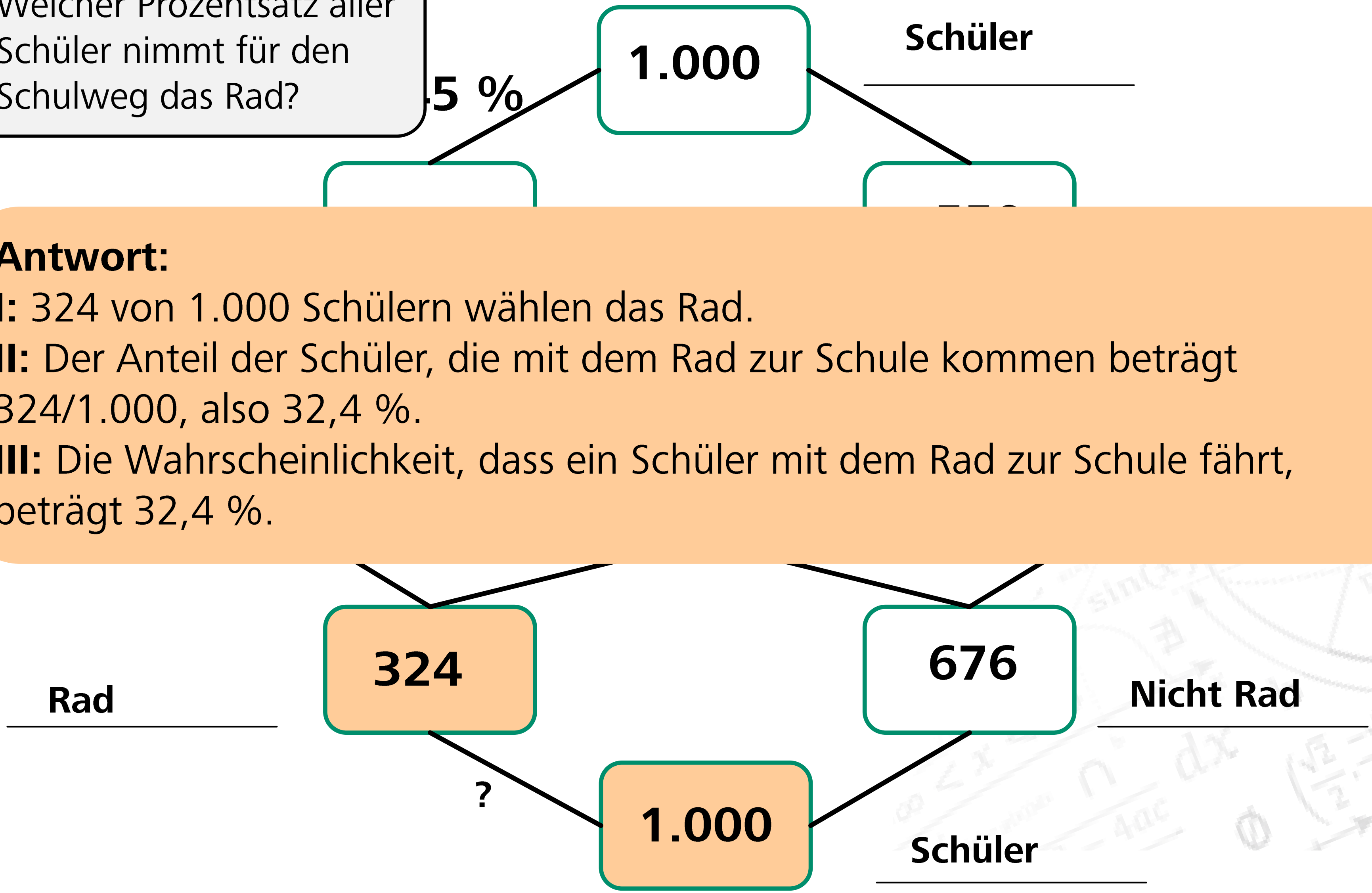
Schritt 5 ▪ Was bedeuten die Informationen für die Stichprobe?

Ausnutzen der additiven Struktur



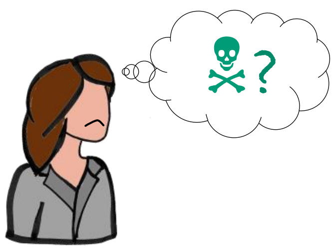
Schritt 6 ▪ Antwort ablesen

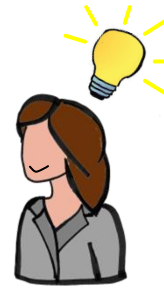
Welcher Prozentsatz aller Schüler nimmt für den Schulweg das Rad?



Antwort:
I: 324 von 1.000 Schülern wählen das Rad.
II: Der Anteil der Schüler, die mit dem Rad zur Schule kommen beträgt 324/1.000, also 32,4 %.
III: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schüler mit dem Rad zur Schule fährt, beträgt 32,4 %.

Strategien zur Lösung von Aufgaben mit bedingten Wahrscheinlichkeiten





Vermeidung des Begriffs „Wahrscheinlichkeit“ → Vermeidung des Begriffs „Prozent“ → Zeichnen eines Baumdiagramms mit absoluten Häufigkeiten → Ergänzen des Baums zu einem Doppelbaum

Natürliche Häufigkeiten

Der Häufigkeits(doppel)baum

Vorteile von Häufigkeitsdoppelbäumen:

1. Die Situation wird **vollständig** durchdrungen (und nicht nur eine spezielle gefragte Wahrscheinlichkeit illustriert) und die Bäume lassen sich von Schülern sehr einfach konstruieren.
2. **Alle** Wahrscheinlichkeiten lassen sich **direkt** ablesen und bedingte Wahrscheinlichkeiten können auf den Pfaden bequem ergänzt werden, z.B:
   - Wahrscheinlichkeiten von Schnittmengen können durch „Überspringen einer Ebene“ abgelesen werden.
   - „Inverse“ bedingte Wahrscheinlichkeiten können „auf der anderen Seite“ des Baumes abgelesen werden, wodurch auch die notorische Verwechslung von $P_A(B)$ mit $P_B(A)$ stark reduziert wird.
3. Man benötigt hierzu **weder** den Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeiten **noch** die Pfadregeln.
4. Häufigkeitsdoppelbäume können **„mitwachsen“** – von der Unterstufe bis zum Abitur – der Lösungsweg ist immer derselbe!

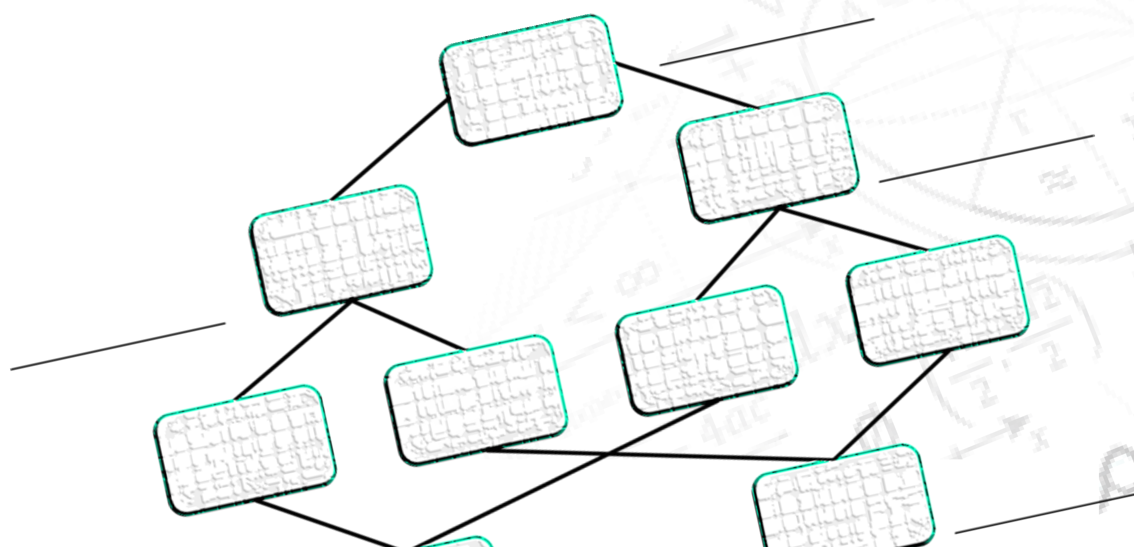
Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

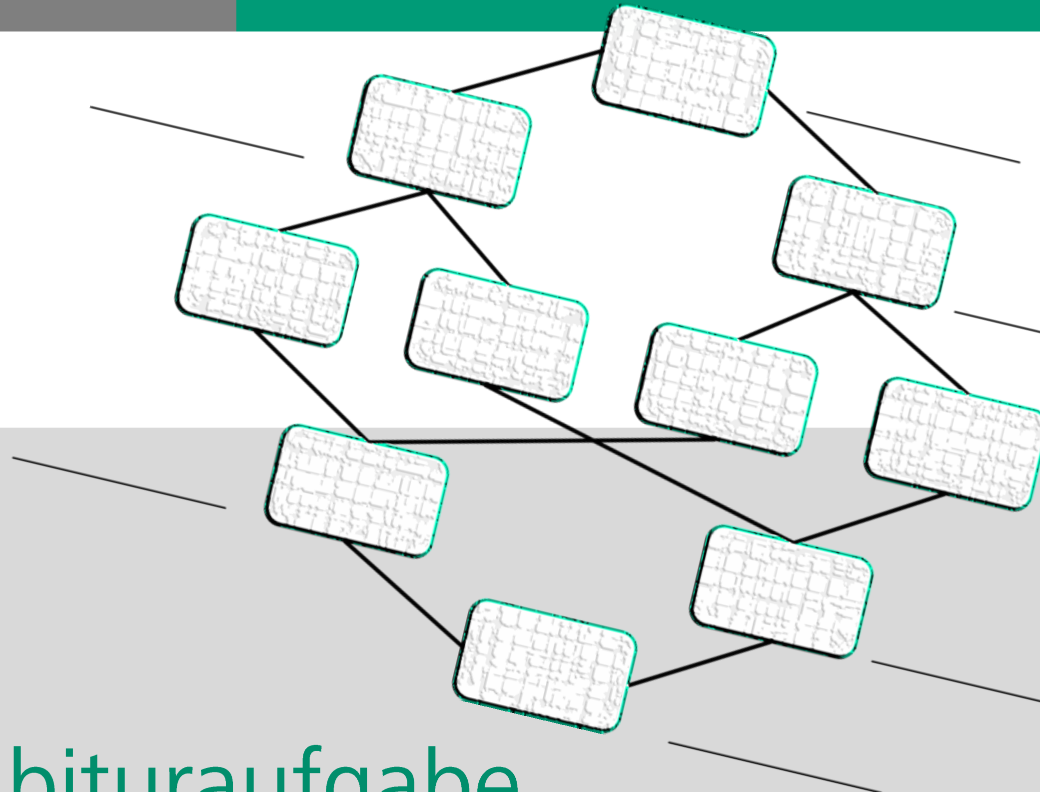
Anhang

Anhang 1: Beispiel für eine Abituraufgabe

Anhang 2: Empirische Studien zu Häufigkeitsbäumen

Anhang 3: Bei welchen Aufgaben „funktionieren“ Häufigkeitsdoppelbäume?





Anhang 1:
Beispiel für eine Abituraufgabe

Im Workshop (http://www.uni-regensburg.de/mathematik/didaktik-mathematik/lehrerfortbildungen/index.html) werden auch Abituraufgaben mit Häufigkeitsdoppelbäumen gelöst (Aufgaben 10, 11 und 12). Diese lassen sich erstaunlicherweise oft mit dem Wissen aus der Unterstufe ganz einfach lösen (vgl. Aufgaben 5 und 6). Gelegentlich muss man dabei jedoch eine Unbekannte „x“ modellieren. Anhang 1 illustriert, dass solche Aufgaben aber ebenfalls mit Häufigkeitsdoppelbäumen gelöst werden können.

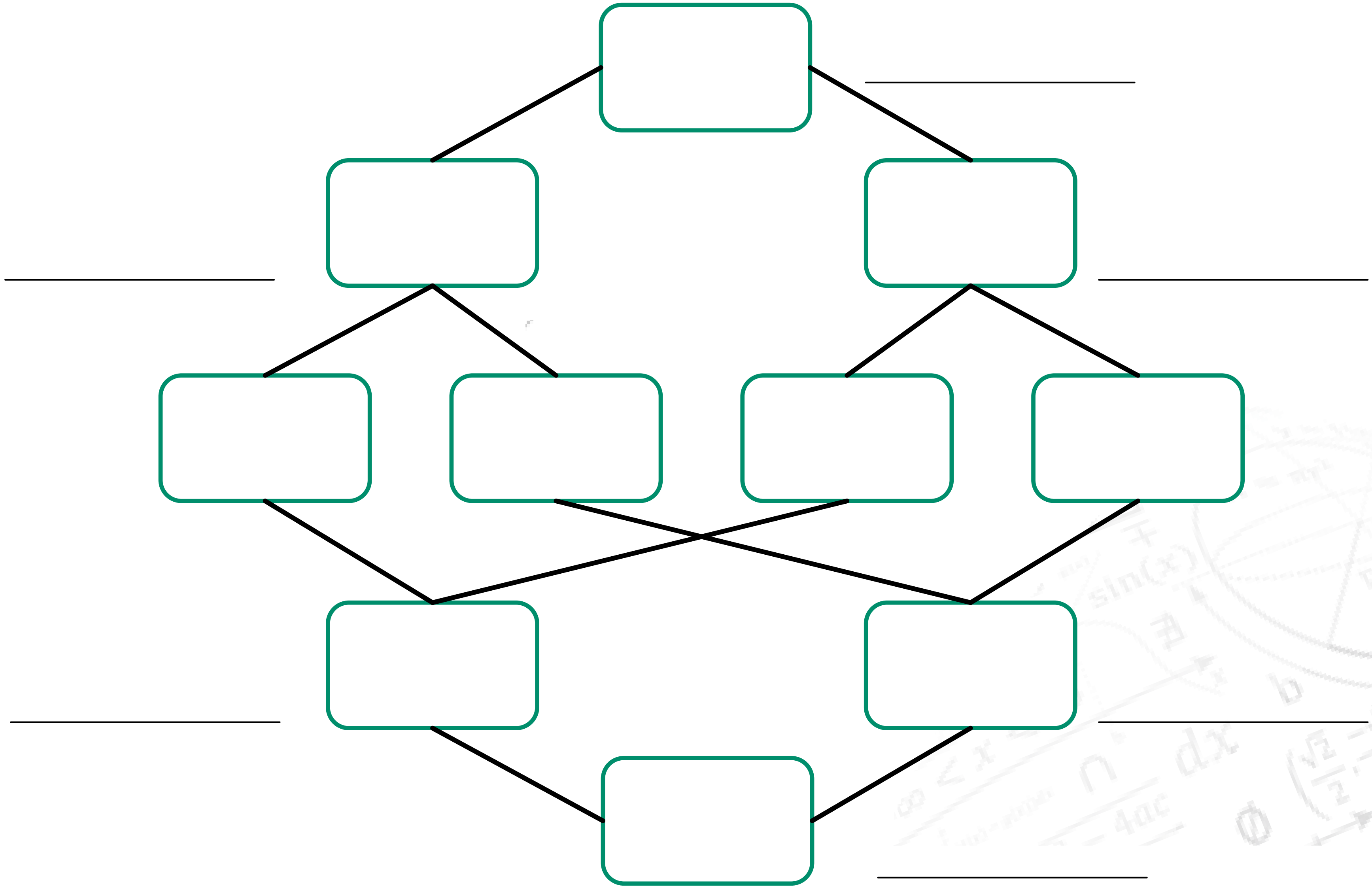
Abitur 2016 ▪ B3

Ein Pharmaunternehmen hat einen Hauttest zum Nachweis einer Tierhaarallergie entwickelt. Im Rahmen einer klinischen Studie zeigt sich, dass der Hauttest bei einer aus der Bevölkerung Deutschlands zufällig ausgewählten Person mit einer Wahrscheinlichkeit von **39,5%** ein positives Testergebnis liefert. Leidet eine Person an einer Tierhaarallergie, so ist das Testergebnis mit einer Wahrscheinlichkeit von **85%** positiv. Das Testergebnis ist jedoch bei einer Person, die nicht an einer Tierhaarallergie leidet, mit einer Wahrscheinlichkeit von **35%** ebenfalls positiv.

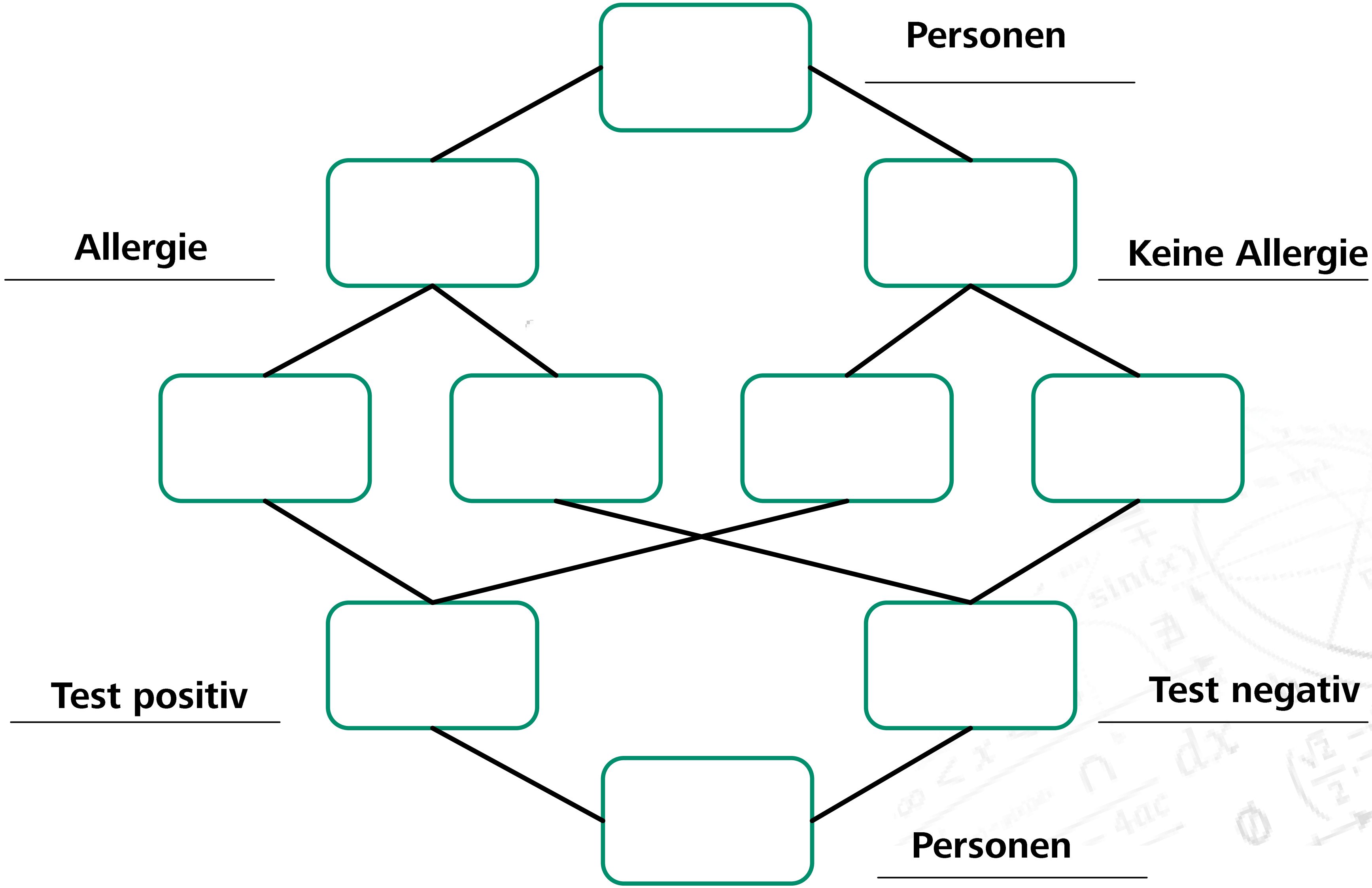
Aufgabe 1: Ermitteln Sie, welcher Anteil der Bevölkerung Deutschlands demnach allergisch auf Tierhaare reagiert.

Aufgabe 2: Eine aus der Bevölkerung Deutschlands zufällig ausgewählte Person wird getestet; das Testergebnis ist positiv. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Person tatsächlich an einer Tierhaarallergie leidet.

Schritt 1 ■ Zeichnen der Struktur

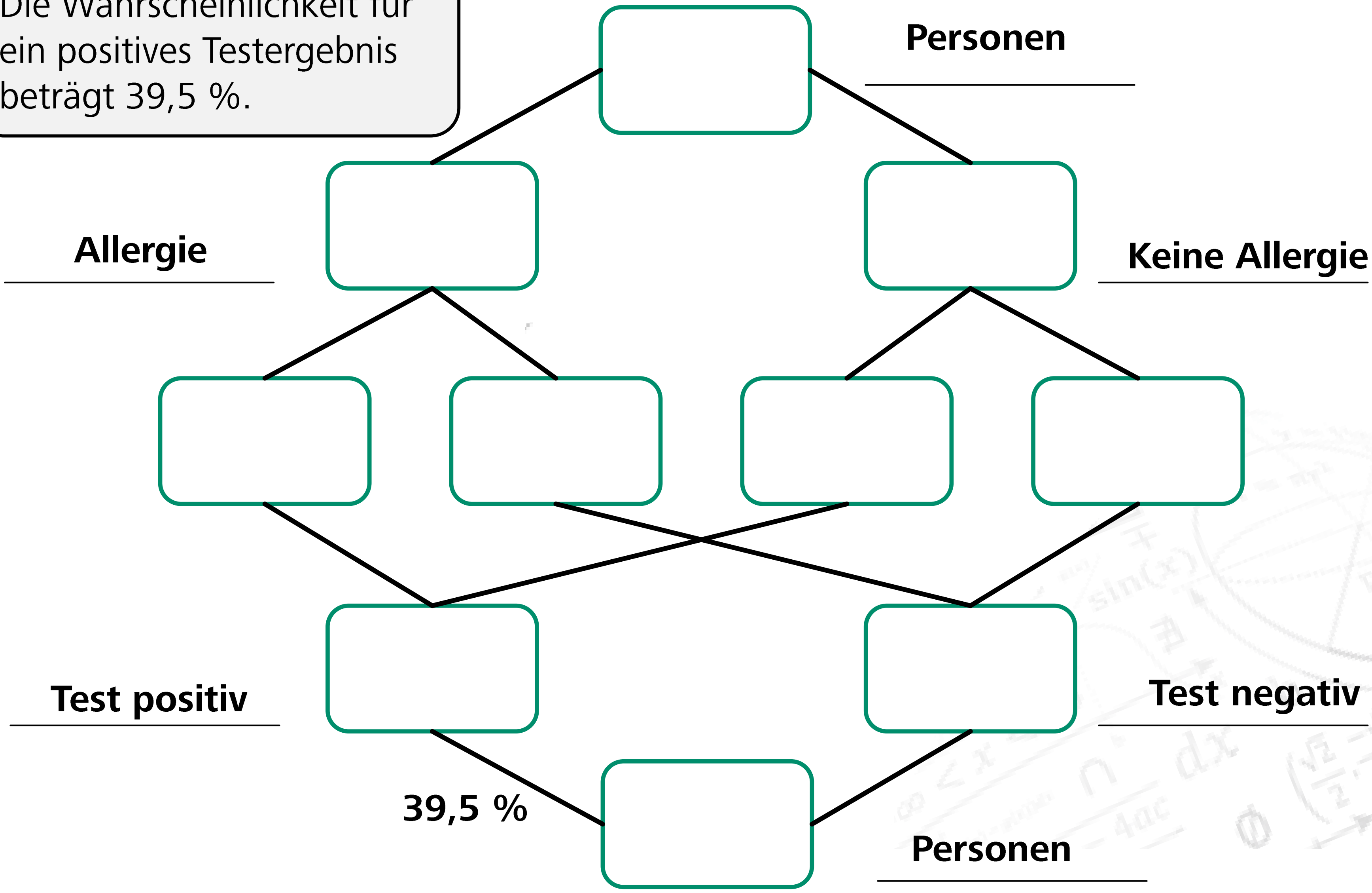


Schritt 2 ▪ Beschriften des Baums



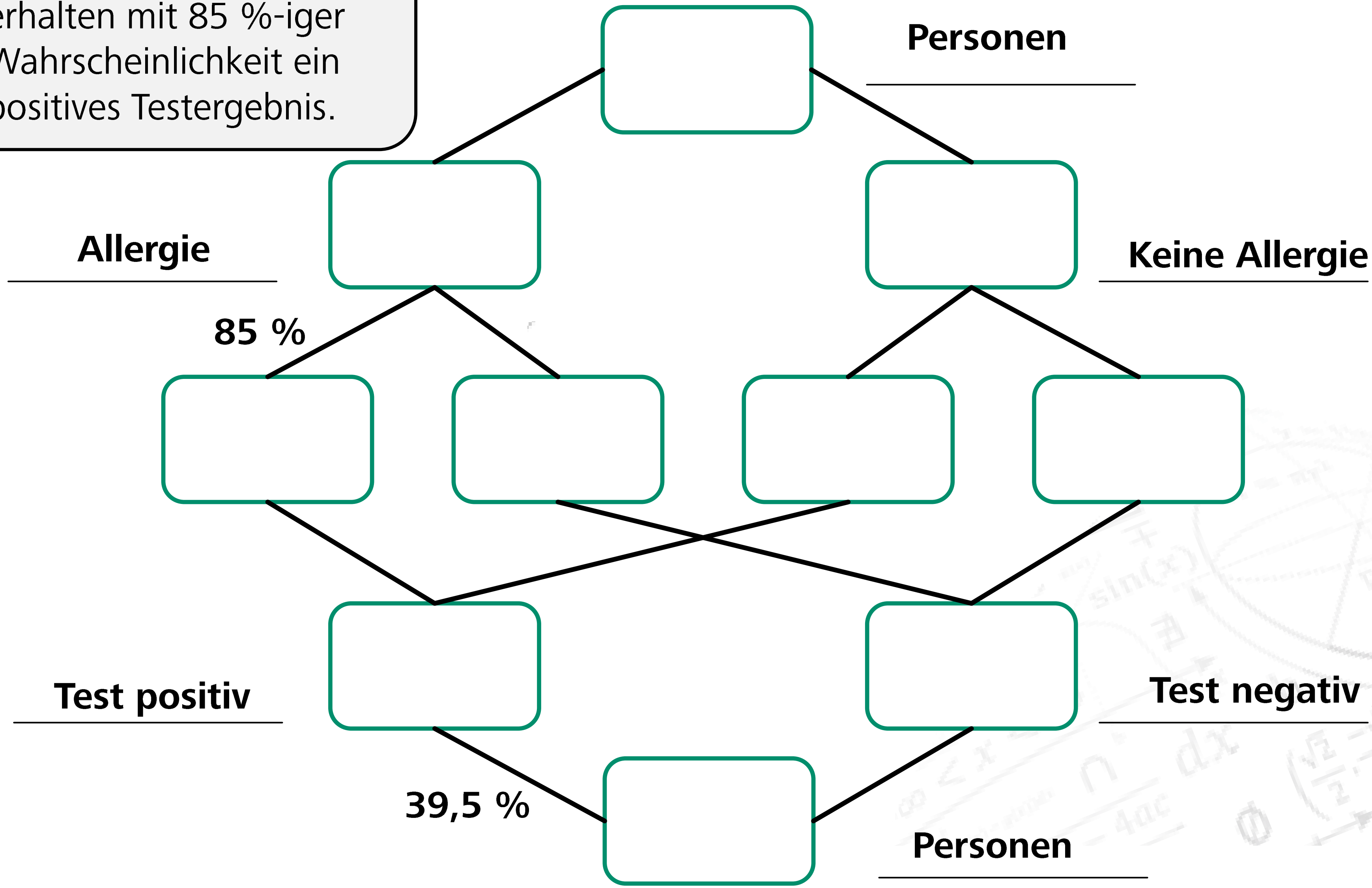
Schritt 3 ▪ Trage alle Informationen aus der Aufgabe ein

Die Wahrscheinlichkeit für ein positives Testergebnis beträgt 39,5 %.



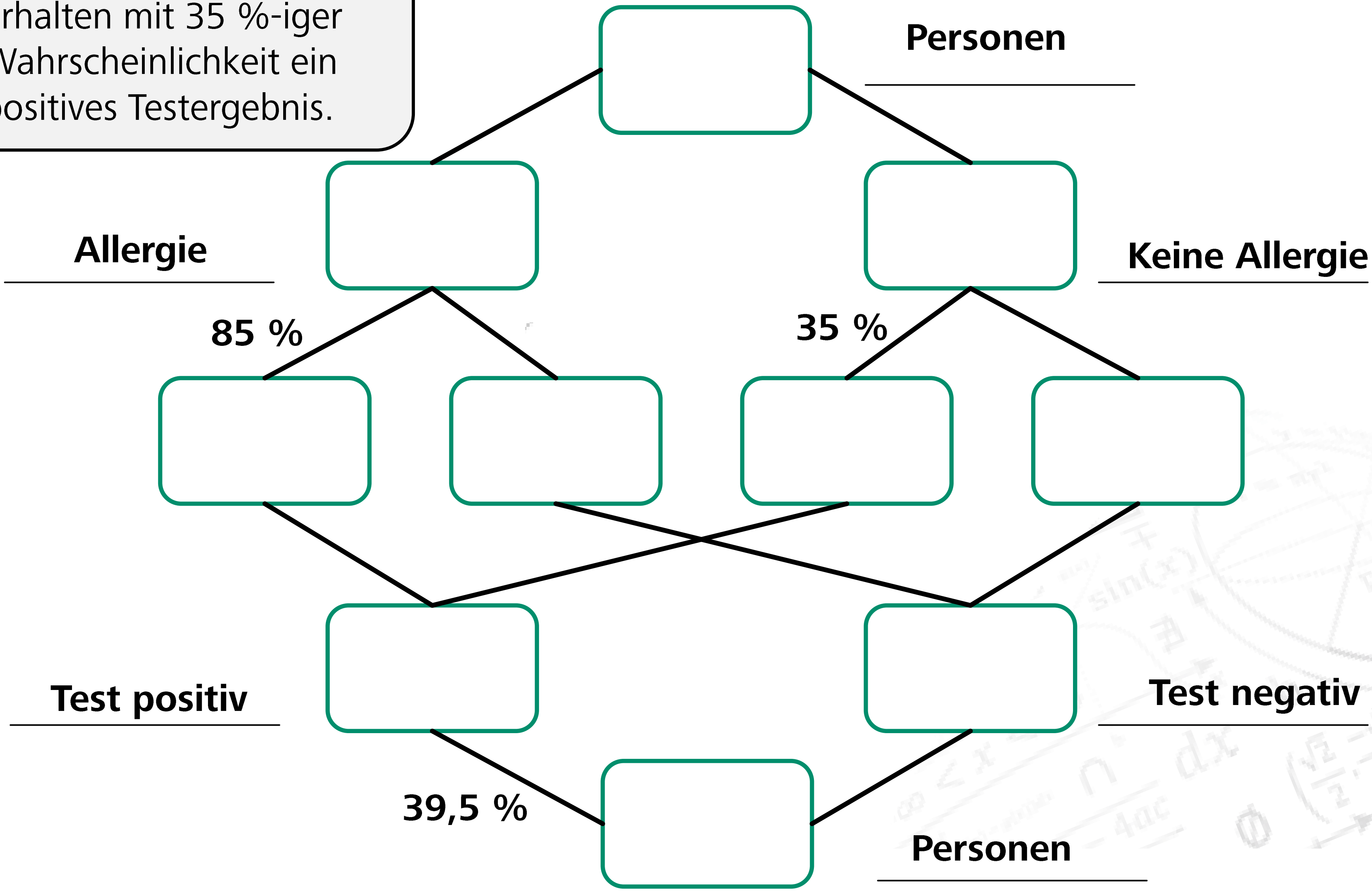
Schritt 3 ▪ Trage alle Informationen aus der Aufgabe ein

Menschen mit Allergie erhalten mit 85 %-iger Wahrscheinlichkeit ein positives Testergebnis.

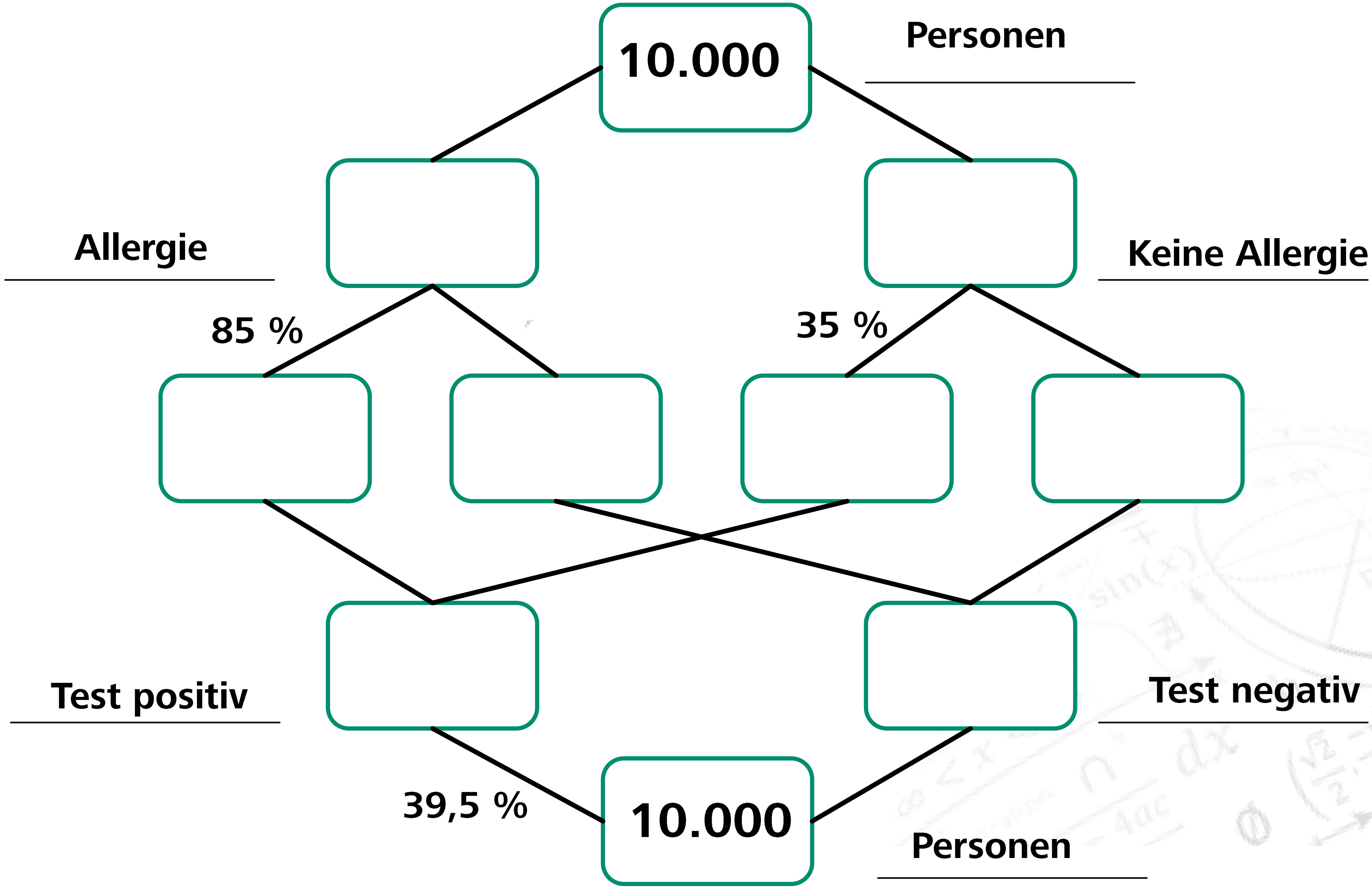


Schritt 3 ▪ Trage alle Informationen aus der Aufgabe ein

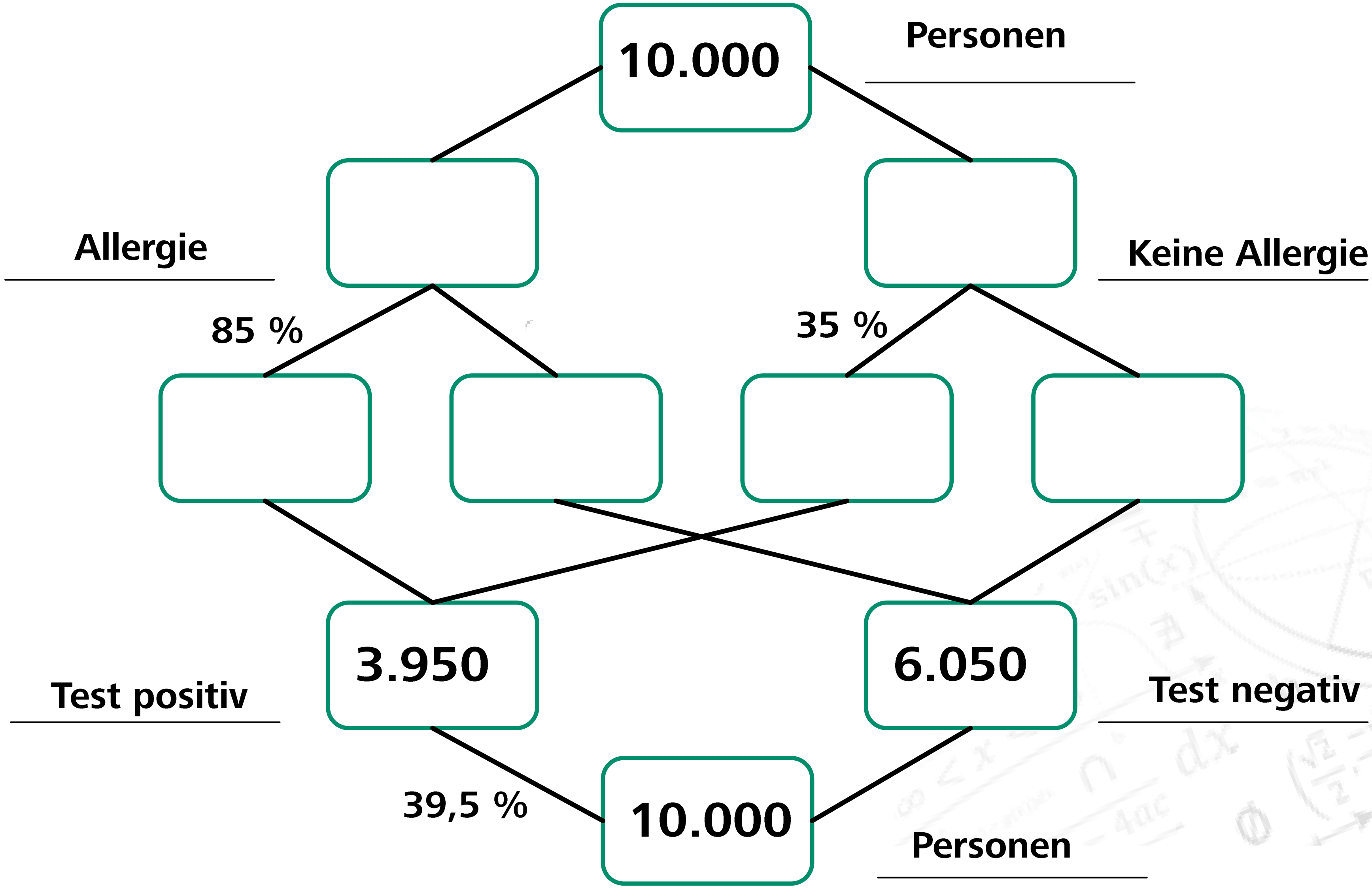
Menschen ohne Allergie erhalten mit 35 %-iger Wahrscheinlichkeit ein positives Testergebnis.



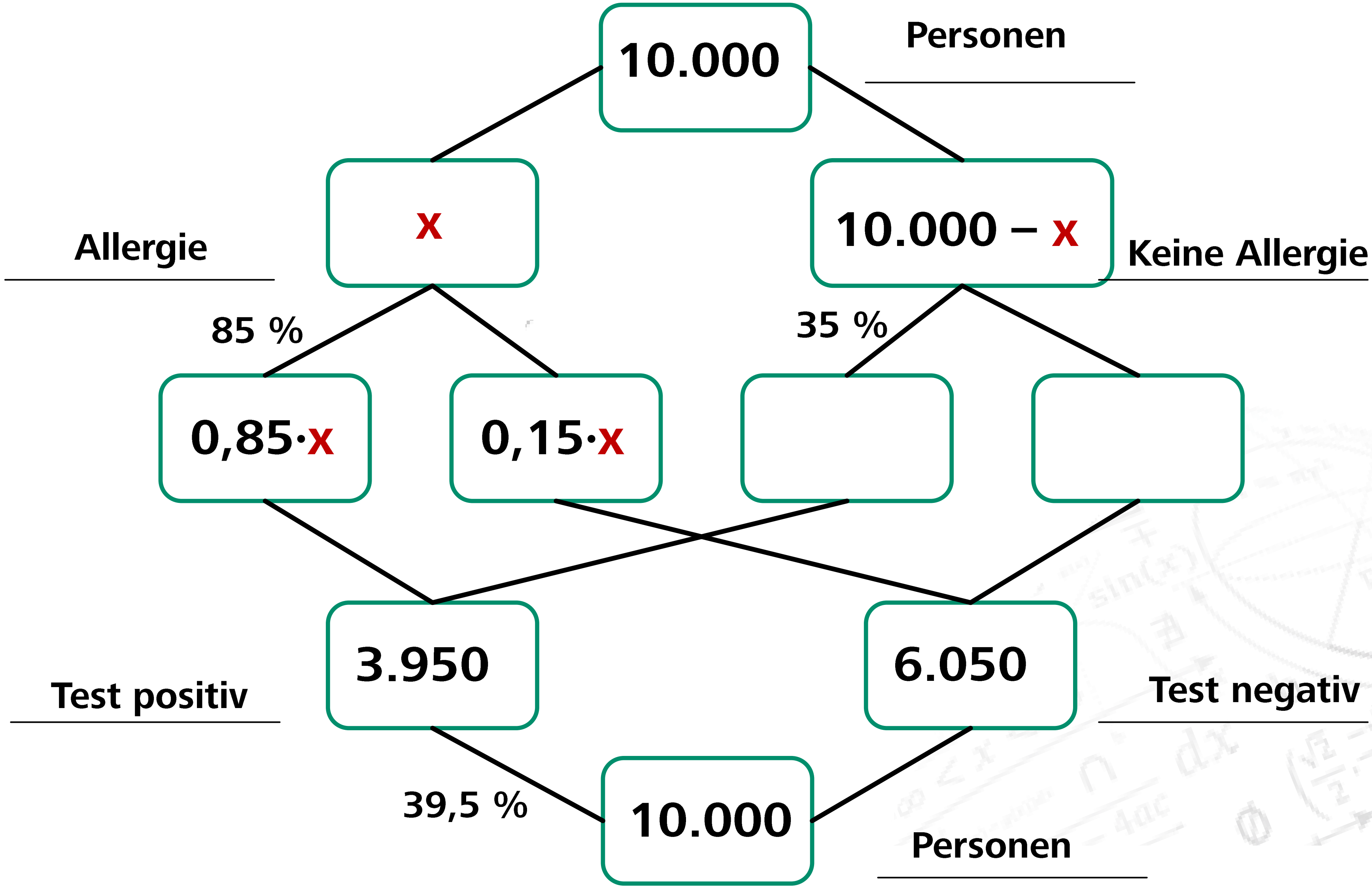
Schritt 4 ▪ Wahl einer (imaginären) Stichprobe



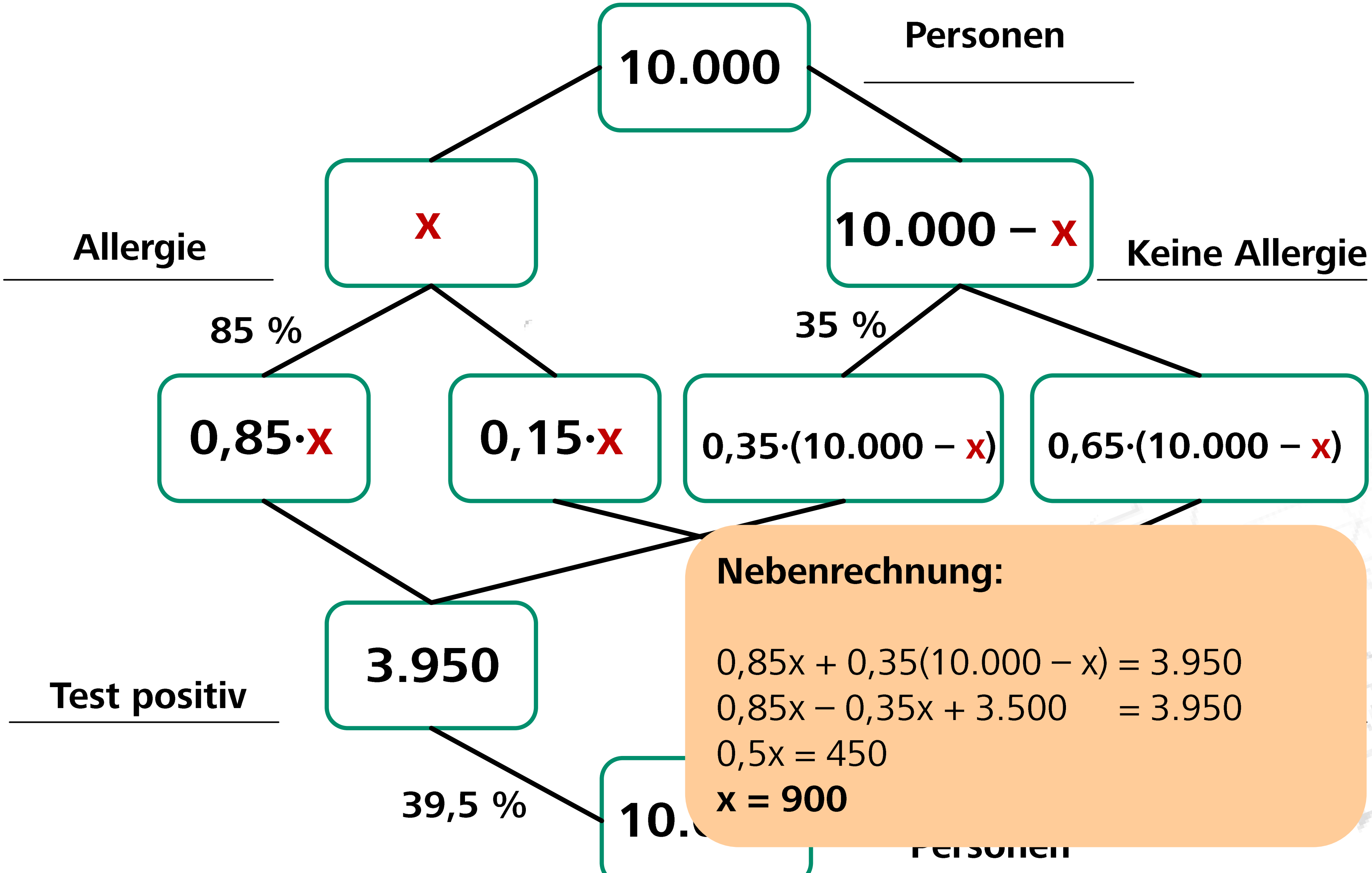
Schritt 5 ▪ Was bedeuten die Informationen für die Stichprobe?



Schritt 5 ▪ Was bedeuten die Informationen für die Stichprobe?



Schritt 5 ▪ Was bedeuten die Informationen für die Stichprobe?



Nebenrechnung:

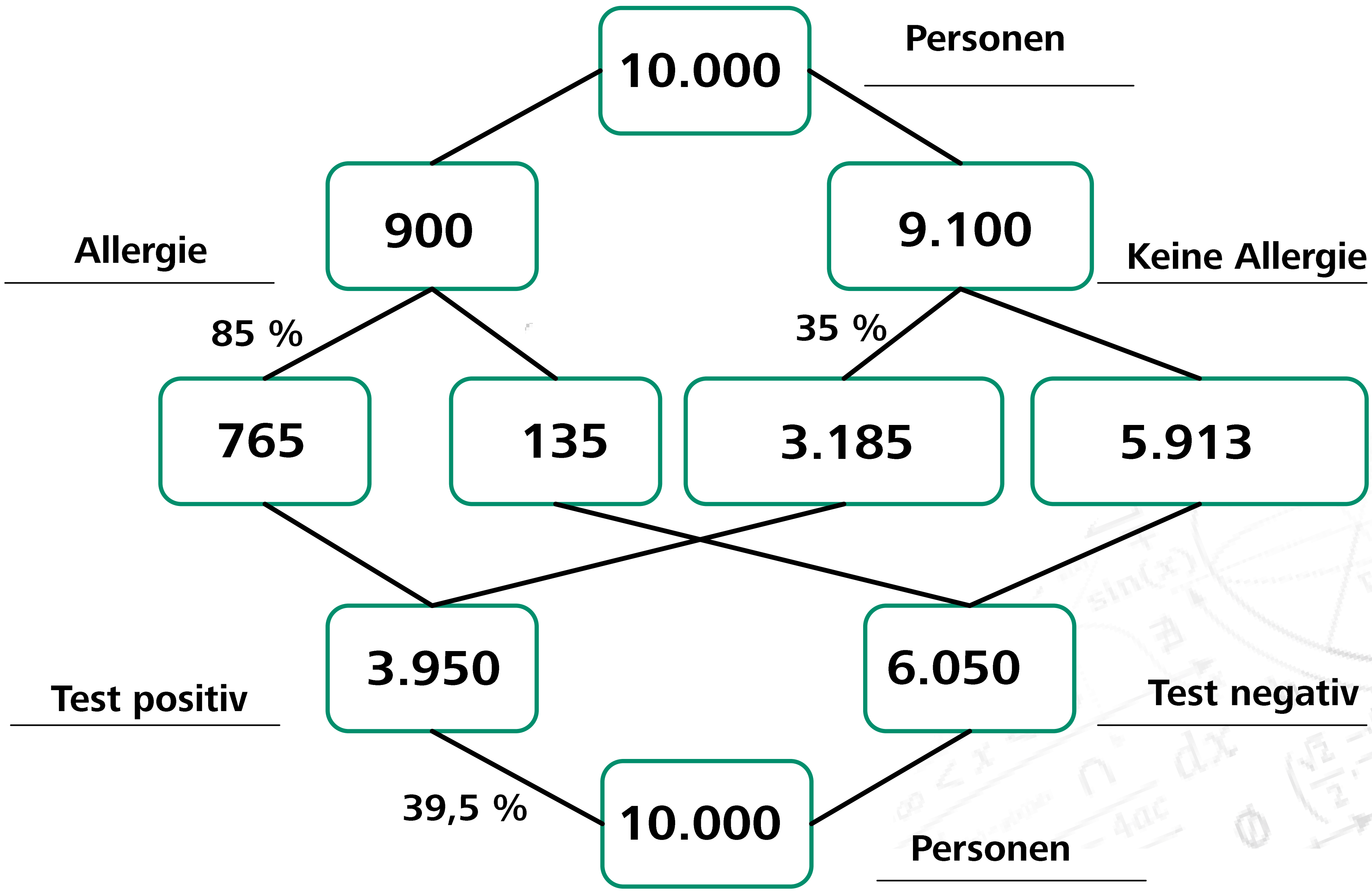
$0{,}85x + 0{,}35(10.000 - x) = 3.950$

$0{,}85x - 0{,}35x + 3.500 = 3.950$

$0{,}5x = 450$

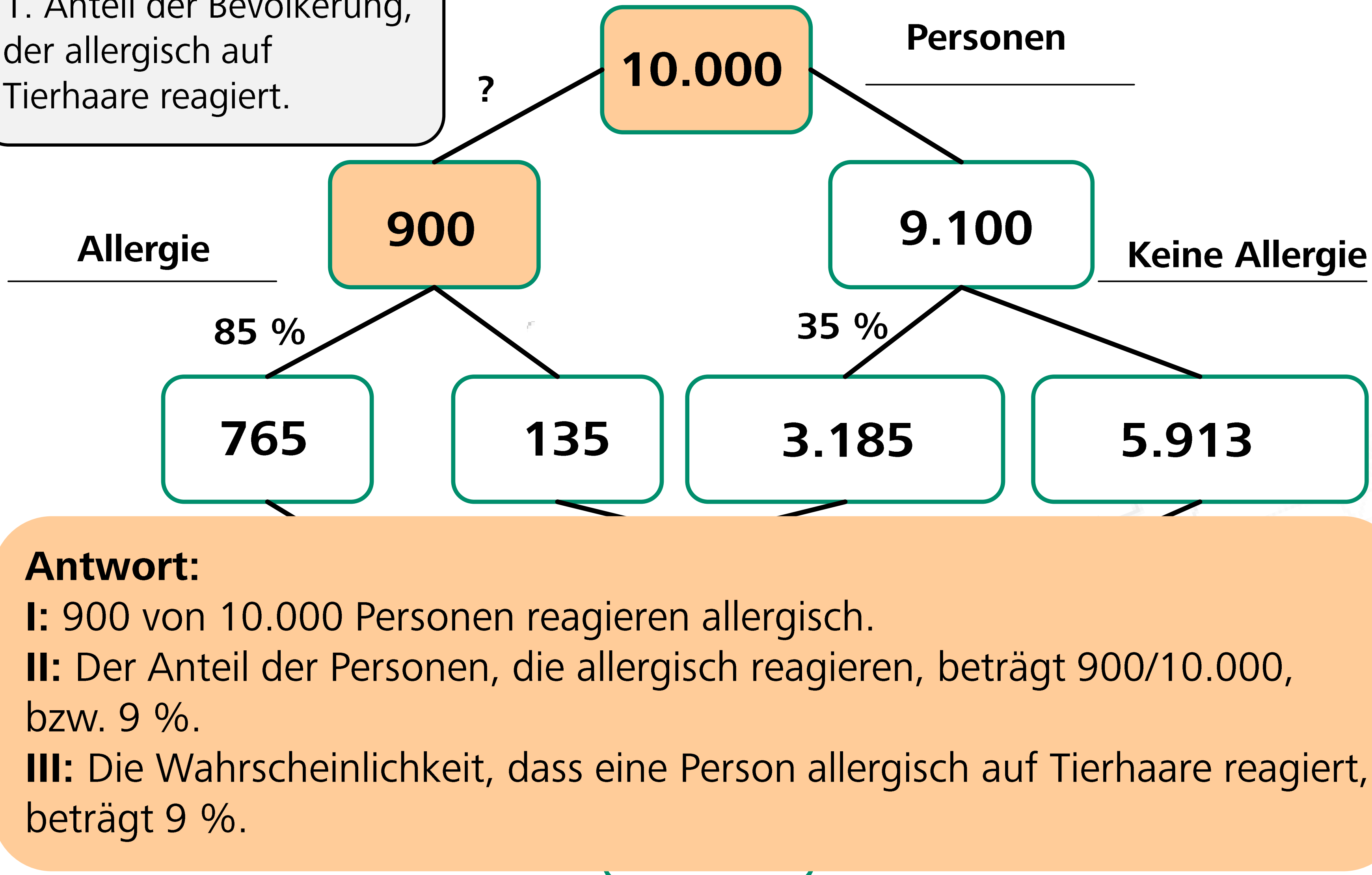
$\mathbf{x = 900}$

Schritt 5 ▪ Was bedeuten die Informationen für die Stichprobe?



Schritt 6 ▪ Antworten ablesen

1. Anteil der Bevölkerung, der allergisch auf Tierhaare reagiert.



Antwort:

I: 900 von 10.000 Personen reagieren allergisch.

II: Der Anteil der Personen, die allergisch reagieren, beträgt 900/10.000, bzw. 9 %.

III: Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person allergisch auf Tierhaare reagiert, beträgt 9 %.

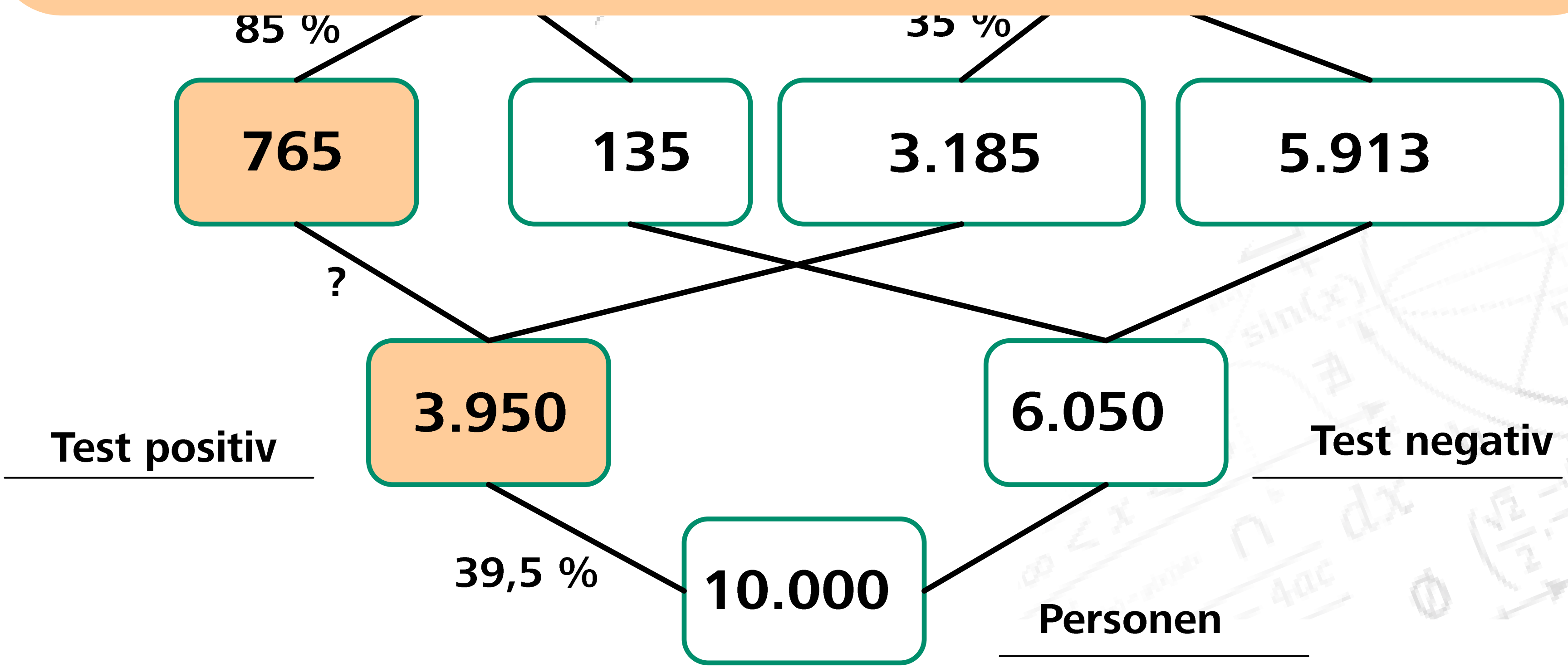
Schritt 6 ▪ Antworten ablesen

Antwort:

I: 765 von 3.950 Personen mit positivem Test sind Allergiker.

II: Der Anteil der Allergiker unter den Personen mit positivem Test beträgt 765/3.950, bzw. 19,4 %.

III: Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person allergisch ist, wenn sie einen positivem Test erhalten hat, beträgt 19,4 %.



Universität Regensburg

Anmerkung

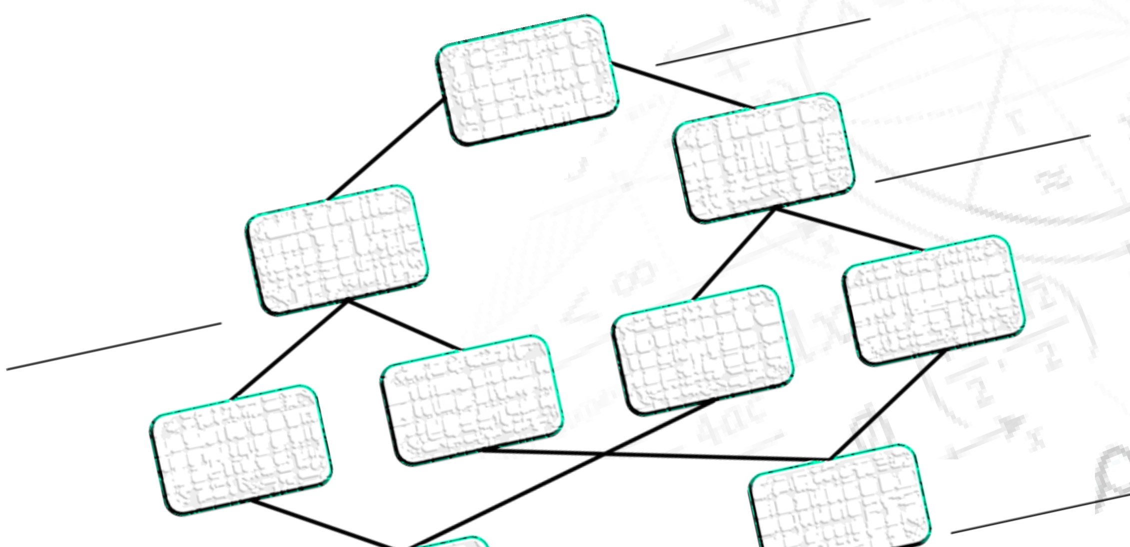
Oftmals lassen sich aber sogar Abituraufgaben dezidiert mit diesem Lösungsweg ohne Modellierung einer Unbekannten lösen, d.h. ausschließlich mit Methoden die bereits aber der Unterstufe bereitstehen (Bruchrechnen, Grundgleichung der Prozentrechnung und Lösen einfacher Gleichungen, siehe Abitur-Aufgaben 10, 11 und 12).

Anhang

Anhang 1: Beispiel für eine Abituraufgabe

Anhang 2: Empirische Studien zu Häufigkeitsdoppelbäumen

Anhang 3: Bei welchen Aufgaben „funktionieren“ Häufigkeitsdoppelbäume?



Anhang 2: Empirische Studien

Im Anhang 2 werden verschiedene Studien zu Häufigkeitsbäumen vorgestellt.

Universität Regensburg

Studie 1 (Wassner, 2004)

Christoph Wassner hat in einer empirischen Studie verschiedene Visualisierungen (u. a. den Häufigkeitsdoppelbaum) mit Schülerinnen und Schülern getestet.

Das Ergebnis der Studie war, dass im Vergleich zu anderen Visualisierungen, wie beispielsweise Vierfeldertafeln oder Flächendiagrammen, der Häufigkeitsdoppelbaum die Lösungsfindung bei Bayesianischen Aufgaben am besten unterstützt!

Wassner, C. (2004). Förderung Bayesianischen Denkens – Kognitionspsychologische Grundlagen und didaktische Analysen. KaDiSto Band 4, Kassel.

Universität Regensburg

Studie 2 (Binder, Krauss & Bruckmaier, 2015)

Schüler können einen Häufigkeitsbaum auch **ohne vorheriges Unterrichten** spontan genauso gut verwenden wie die Vierfeldertafel mit absoluten Häufigkeiten, die im Unterricht thematisiert wurde.

Werden im Baumdiagramm oder in der Vierfeldertafel die Informationen hingegen in Form von Wahrscheinlichkeiten dargeboten, so scheitern die meisten Schüler bei der Beantwortung von Fragen nach bedingten Wahrscheinlichkeiten.

Dieses Ergebnis ist insofern provozierend, da gerade die in der Schule häufig verwendeten Visualisierungen (Baumdiagramme und Vierfeldertafeln mit relativen Häufigkeiten) für Schüler offenbar nur sehr wenig Verständnis fördernd sind.

Binder, K., Krauss, S., & Bruckmaier, G. (2015). Effects of visualizing statistical information–an empirical study on tree diagrams and 2×2 tables. Frontiers in Psychology, 6(1186).

Universität Regensburg

Studie 3 (Weber & Binder, 2017)

Selbst wenn bei Aufgaben alle statistischen Informationen bereits im intuitiven „natürlichen Häufigkeiten“ gegeben sind, ist das Rechnen mit bedingten Wahrscheinlichkeiten bei den Schülerinnen und Schülern kognitiv so fest verankert, dass sie das einfache Häufigkeitsformat zuerst in Wahrscheinlichkeiten übersetzen, um dann an der Aufgabe zu scheitern.☺

Weber, P., & Binder, K. (2017). Häufigkeitsphobie trotz Wahrscheinlichkeitsblindheit (Poster). 51. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM), Potsdam..

In der folgenden mit dem Häufigkeitsdoppelbaum gelösten Abituraufgabe könnte diese Gefahr ebenfalls drohen.

Abitur 2011 ▪ G8 Stochastik III

Ein Investor plant, in einer Gemeinde, die aus den Orten Oberberg und Niederberg besteht, eine Windkraftanlage zu errichten. Um sich einen Überblick darüber zu verschaffen, wie die Einwohner zu diesem Vorhaben stehen, beschließt der Gemeinderat, eine Umfrage unter den Wahlberechtigten der Gemeinde durchzuführen. In Niederberg werden 1722, in Oberberg 258 Einwohner befragt. 1089 aller Befragten äußern keine Einwände gegen die Windkraftanlage, darunter sind allerdings nur 27 Einwohner von Oberberg. Die übrigen befragten Personen sprechen sich gegen die Windkraftanlage aus.

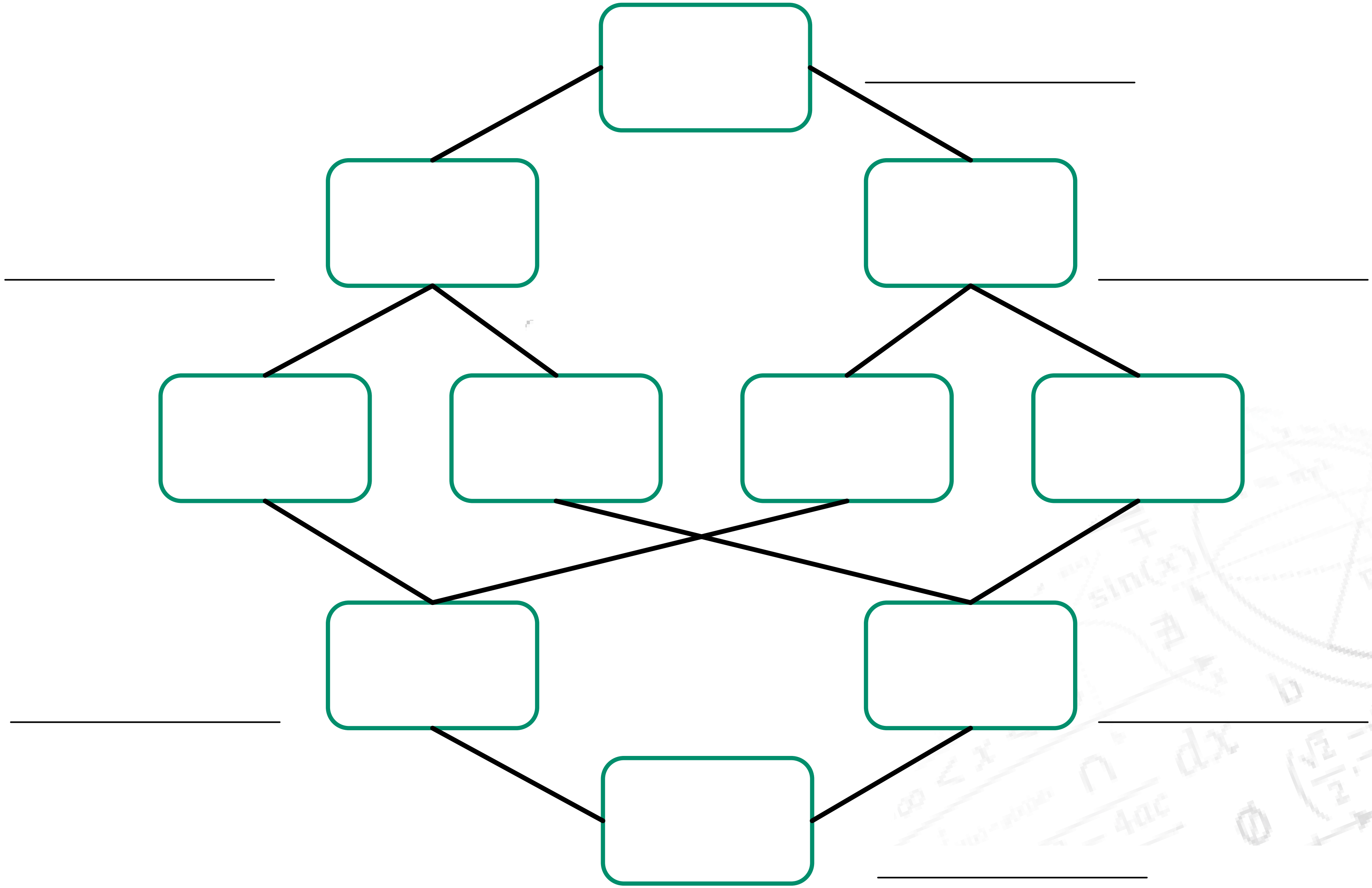
Aufgabe 1: Bestimmen Sie jeweils den prozentualen Anteil der Gegner der Windkraftanlage unter den Befragten von Niederberg und unter den Befragten von Oberberg.

Aufgabe 2: Aus allen Befragten wird zufällig eine Person ausgewählt. Ermitteln Sie

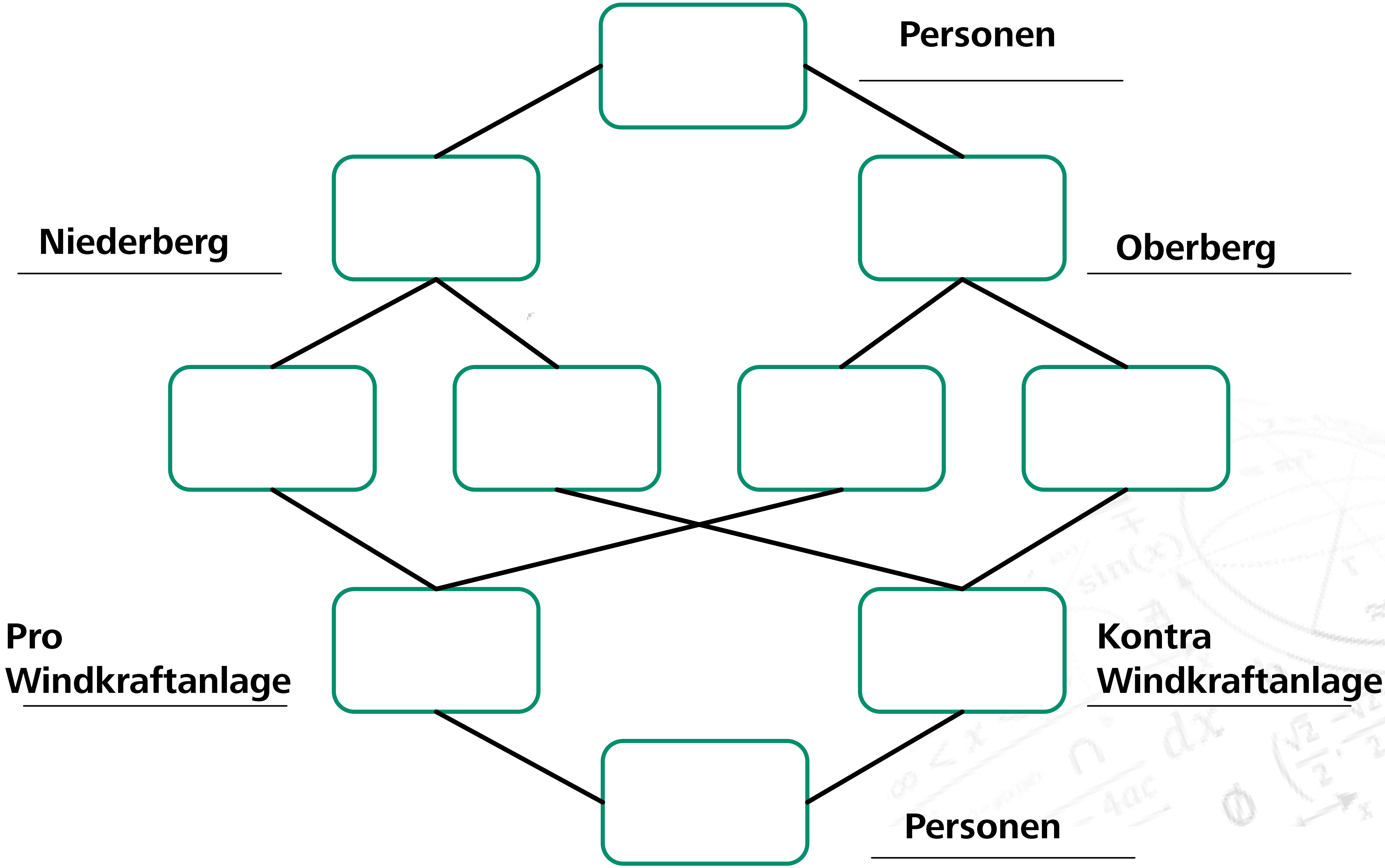
1. die Wahrscheinlichkeit p_1 dafür, dass die ausgewählte Person in Oberberg wohnt und sich gegen die Windkraftanlage aussprach.

2. die Wahrscheinlichkeit p_2 dafür, dass die ausgewählte Person in Oberberg wohnt, wenn bekannt ist, dass sie sich gegen die Windkraftanlage aussprach.

Schritt 1 ▪ Zeichnen der Struktur

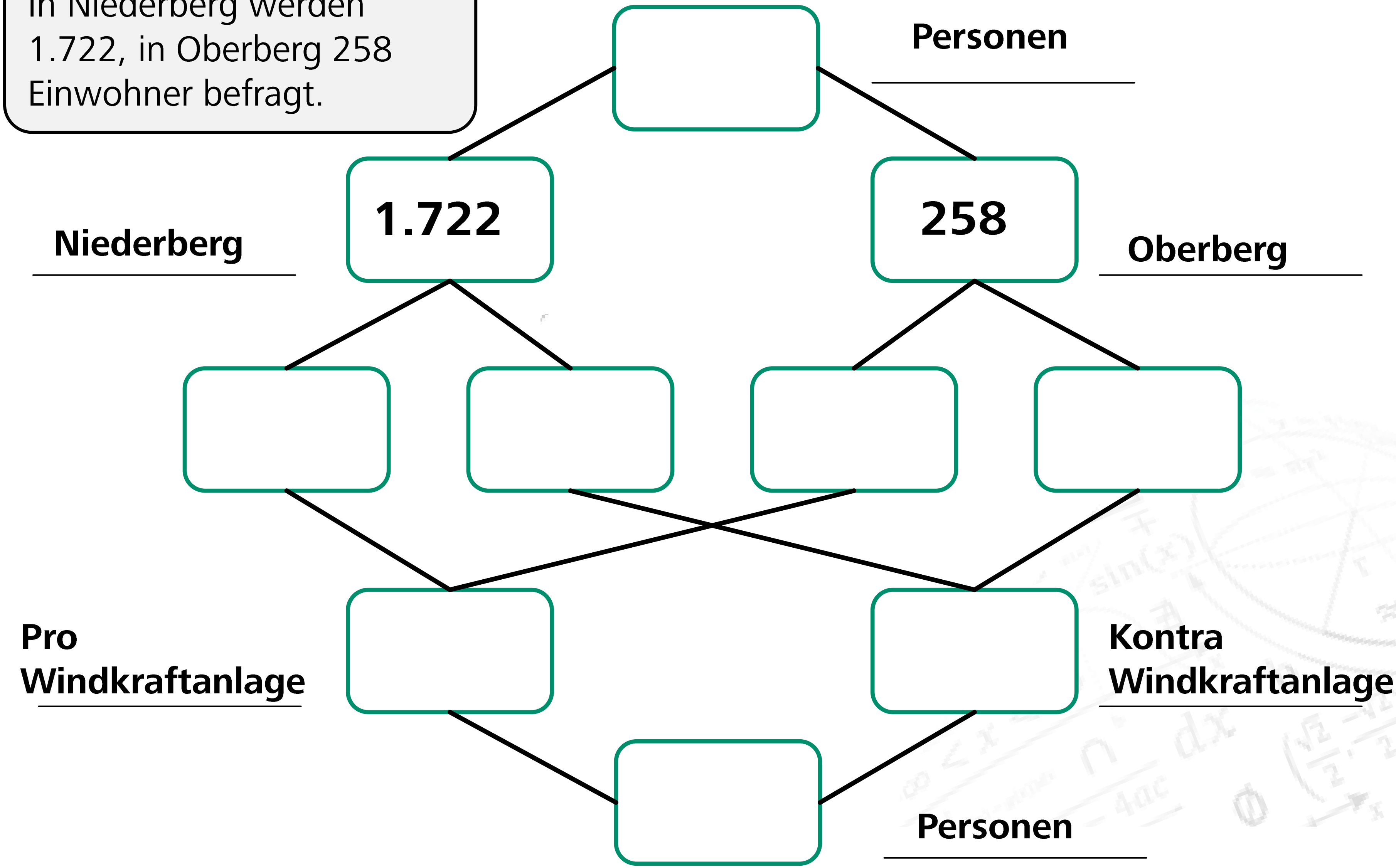


Schritt 2 ▪ Beschriften des Baums



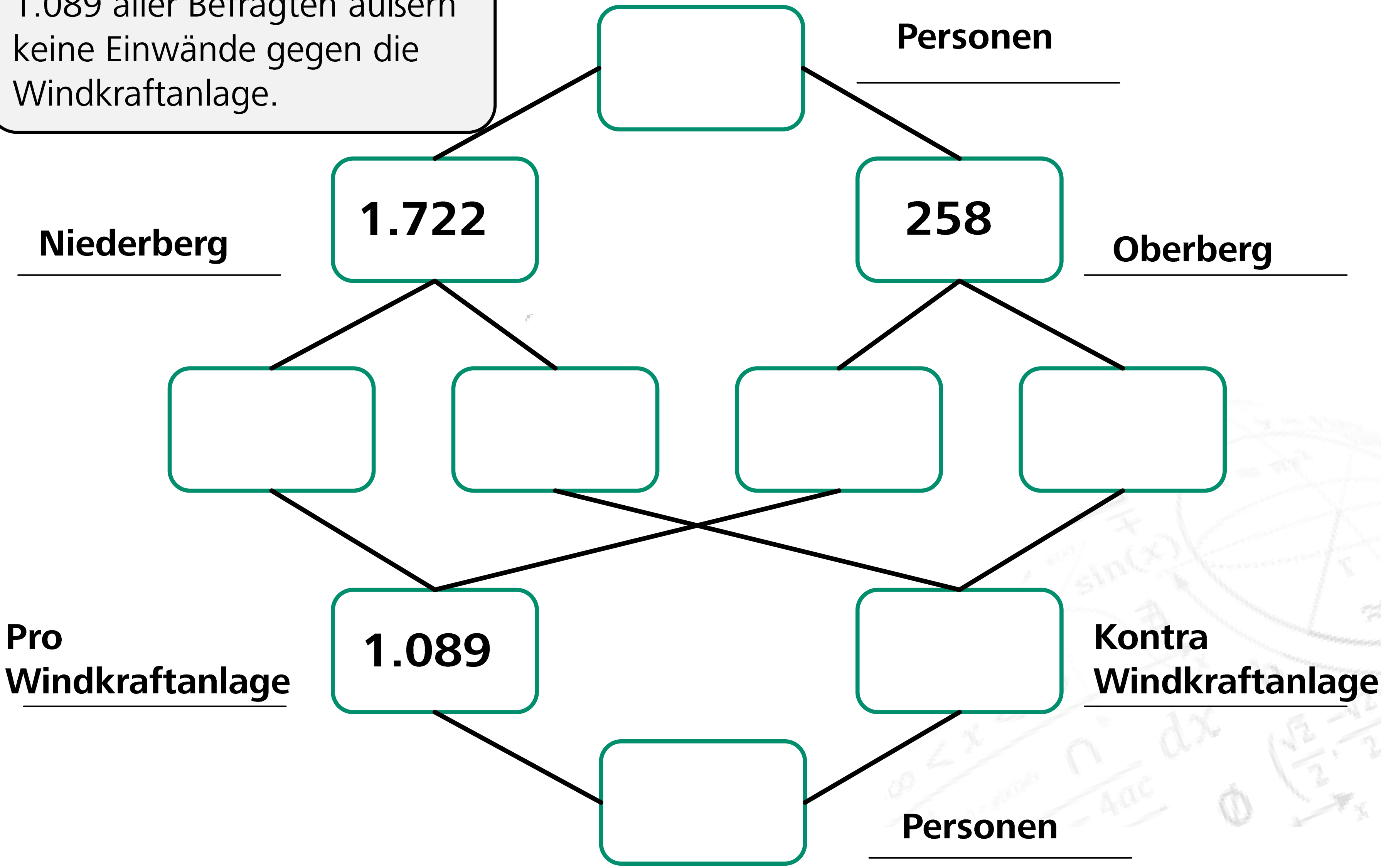
Schritt 3 ▪ Trage alle Informationen aus der Aufgabe ein

In Niederberg werden 1.722, in Oberberg 258 Einwohner befragt.



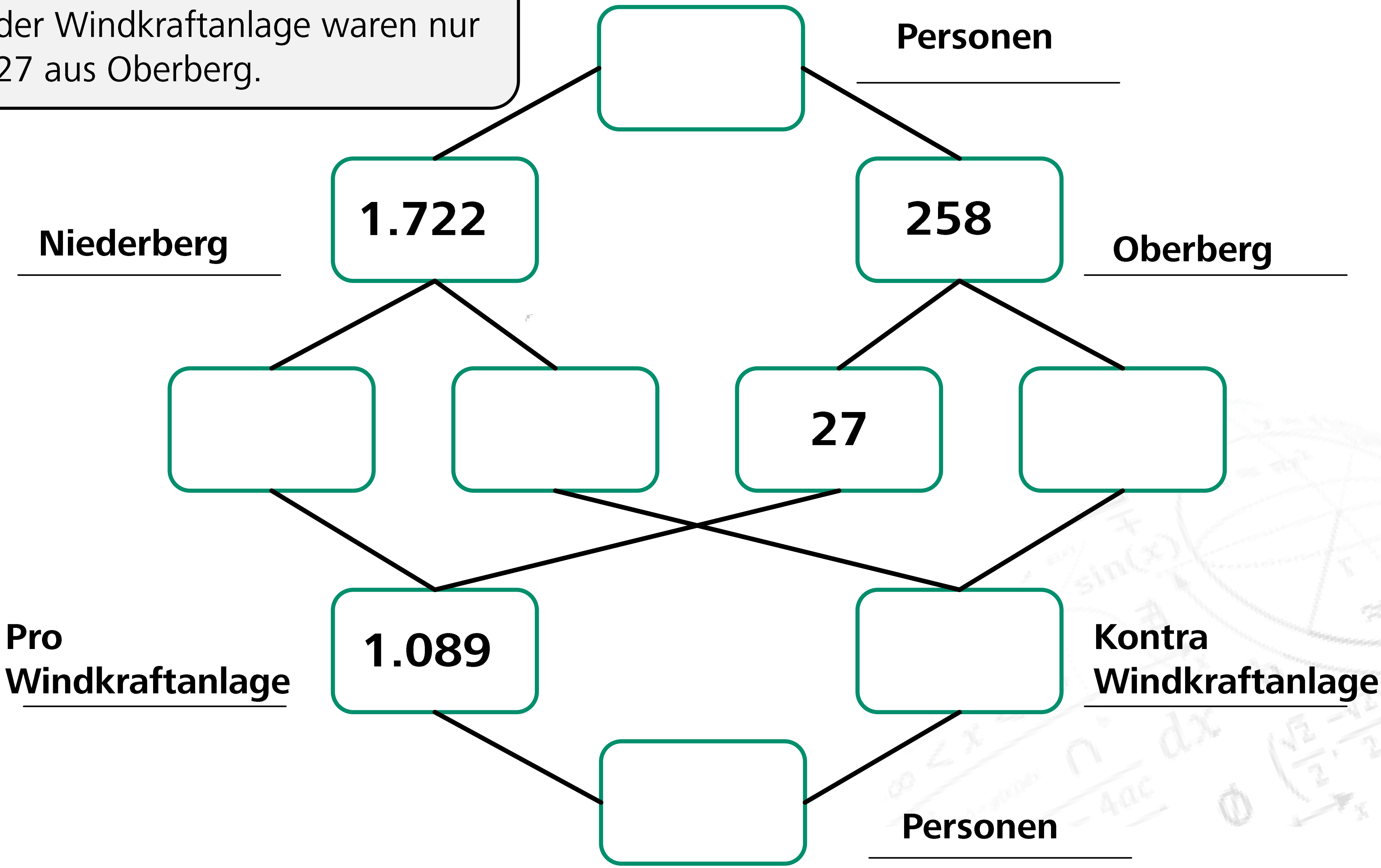
Schritt 3 ▪ Trage alle Informationen aus der Aufgabe ein

1.089 aller Befragten äußern keine Einwände gegen die Windkraftanlage.

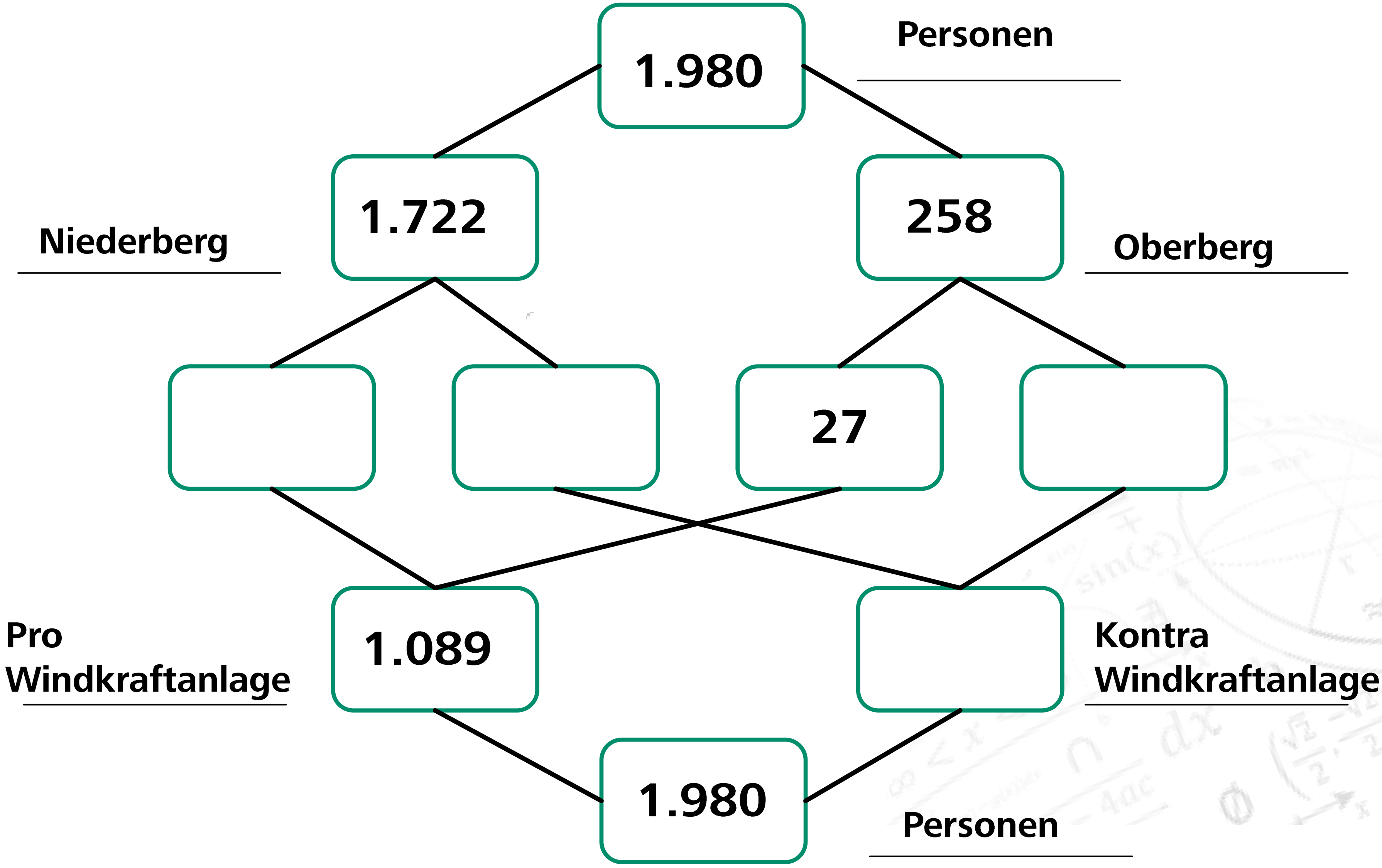


Schritt 3 ▪ Trage alle Informationen aus der Aufgabe ein

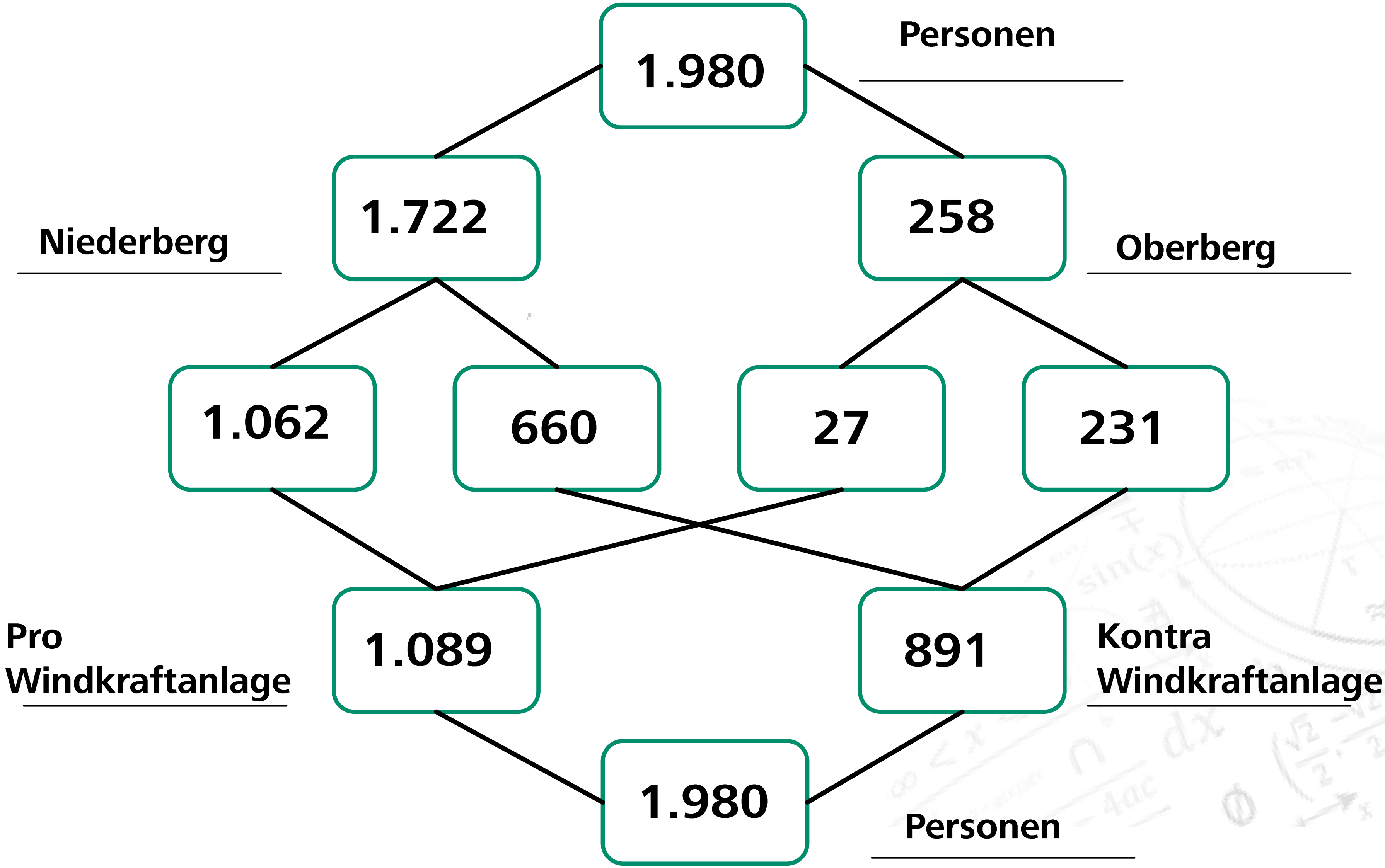
Von diesen 1.089 Befürwortern der Windkraftanlage waren nur 27 aus Oberberg.



Schritt 4 ▪ Wahl einer (imaginären) Stichprobe

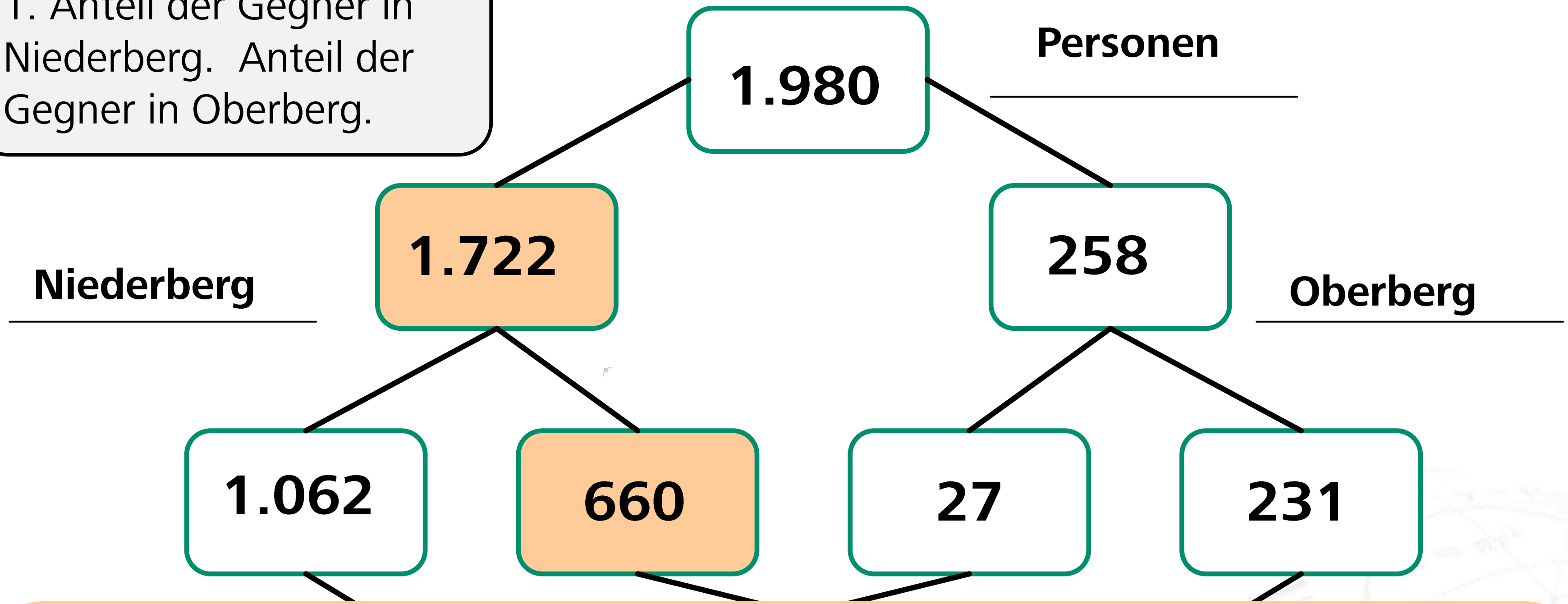


Schritt 5 ▪ Was bedeuten die Informationen für die Stichprobe?



Schritt 6 ▪ Antworten ablesen

1. Anteil der Gegner in Niederberg. Anteil der Gegner in Oberberg.



Antwort Teil 1:

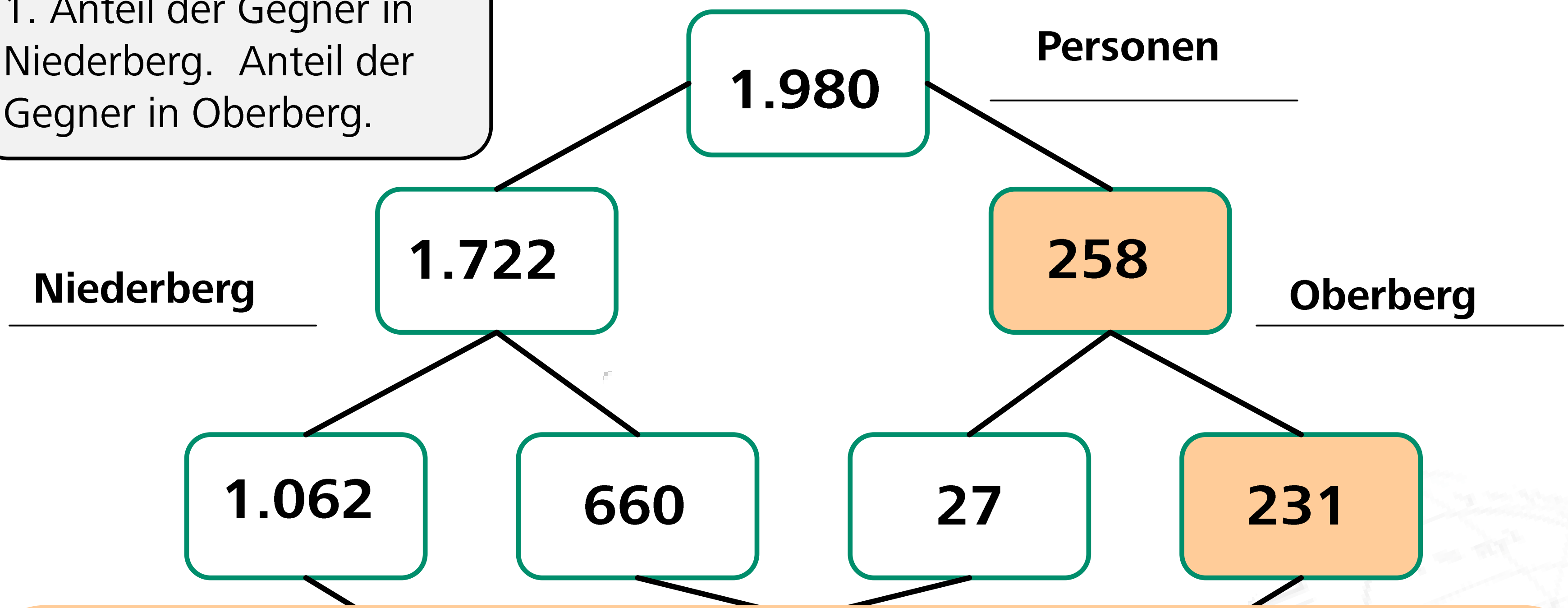
I: 660 von 1.722 Personen in Niederberg sind gegen die Anlage.

II: Der Anteil der Windkraftanlagengegner unter allen Niederbergern, beträgt 660/1.722, also 38,3 %.

III: Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person gegen die Anlage ist, wenn sie aus Niederberg ist, beträgt 38,3 %.

Schritt 6 ▪ Antworten ablesen

1. Anteil der Gegner in Niederberg. Anteil der Gegner in Oberberg.



Antwort Teil 1:

I: 231 von 258 Personen in Oberrberg sind gegen die Anlage.

II: Der Anteil der Windkraftanlagengegner unter allen Oberbergern, beträgt 231/258, also 89,5 %.

III: Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person gegen die Anlage ist, wenn sie aus Oberberg ist, beträgt 89,5 %.

Abitur 2011 ▪ G8 Stochastik III

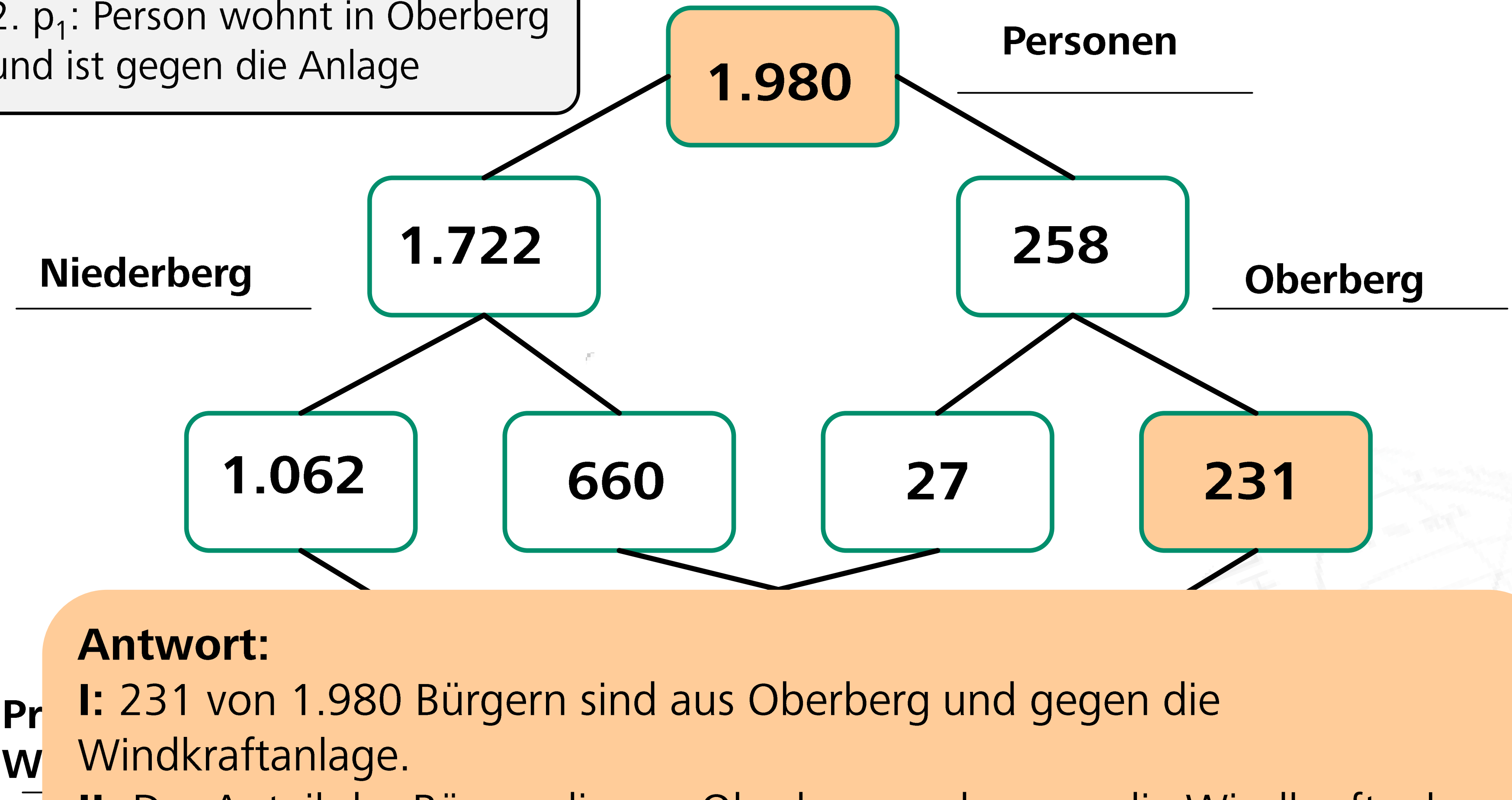
Ein Investor plant, in einer Gemeinde, die aus den Orten Oberberg und Niederberg besteht, eine Windkraftanlage zu errichten. Um sich einen Überblick darüber zu verschaffen, wie die Einwohner zu diesem Vorhaben stehen, beschließt der Gemeinderat, eine Umfrage unter den Wahlberechtigten der Gemeinde durchzuführen. In Niederberg werden 1722, in Oberberg 258 Einwohner befragt. 1089 aller Befragten äußern keine Einwände gegen die Windkraftanlage, darunter sind allerdings nur 27 Einwohner von Oberberg. Die übrigen befragten Personen sprechen sich gegen die Windkraftanlage aus.

Teilaufgabe: Aus allen Befragten wird zufällig eine Person ausgewählt. Ermitteln Sie

1. die Wahrscheinlichkeit p_1 dafür, dass die ausgewählte Person in Oberberg wohnt und sich gegen die Windkraftanlage aussprach.
2. die Wahrscheinlichkeit p_2 dafür, dass die ausgewählte Person in Oberberg wohnt, wenn bekannt ist, dass sie sich gegen die Windkraftanlage aussprach.

Schritt 6 ▪ Antworten ablesen

2. p_1: Person wohnt in Oberberg und ist gegen die Anlage



Antwort:

I: 231 von 1.980 Bürgern sind aus Oberberg und gegen die Windkraftanlage.

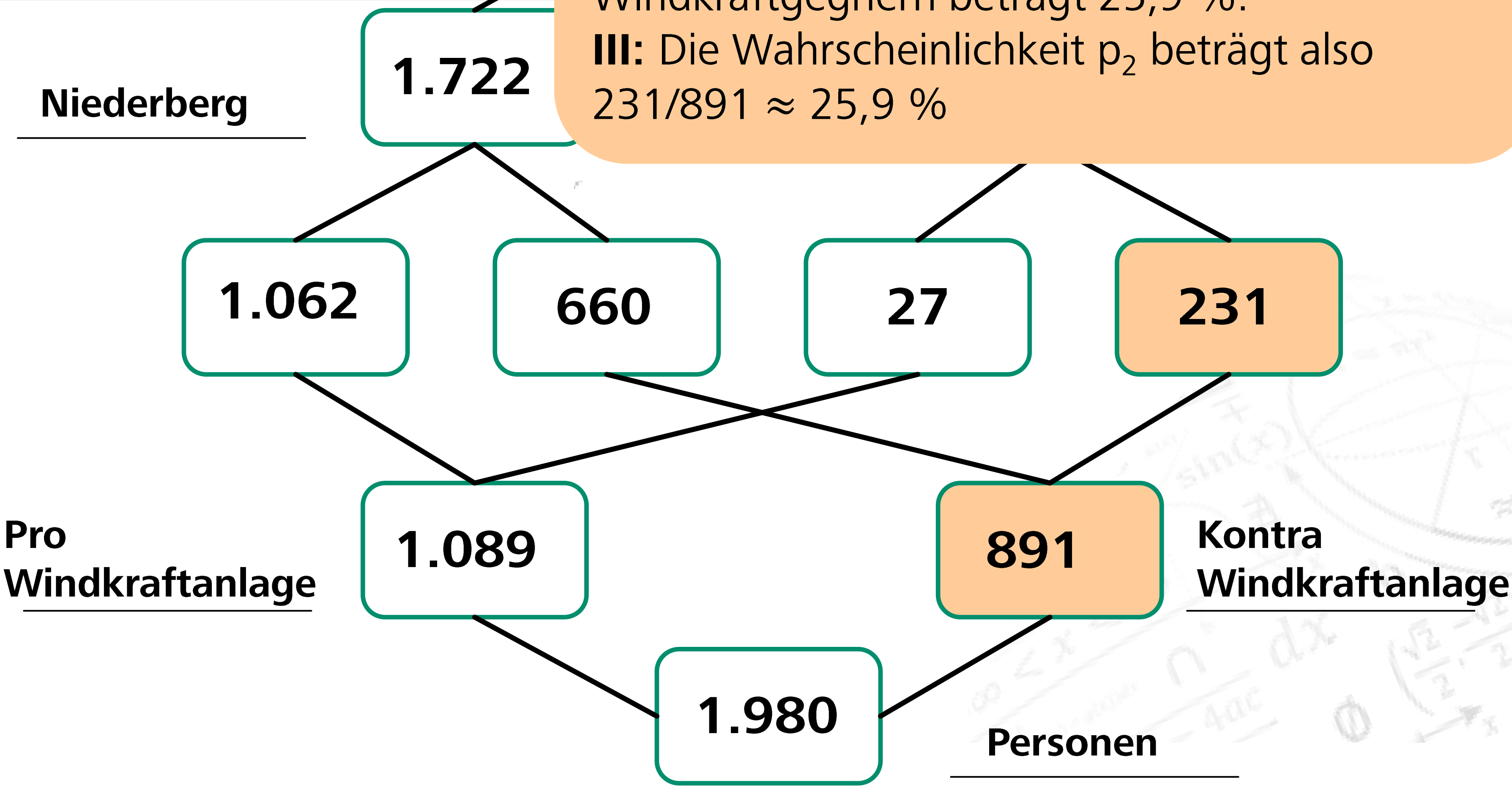
II: Der Anteil der Bürger die aus Oberberg und gegen die Windkraftanlage sind beträgt 11,7%.

III: Die Wahrscheinlichkeit p_1 beträgt also $231/1.980 \approx 11{,}7$ %

Schritt 6 ▪ Antworten ab

2. p_2: Person wohnt in Oberberg, wenn bekannt ist, dass sie gegen die Windkraftanlage ist

Antwort:
I: 231 von 891 Bürgern, die gegen die Windkraftanlage sind, sind aus Oberberg.
II: Der Anteil der Oberberger unter den Windkraftgegnern beträgt 25,9 %.
III: Die Wahrscheinlichkeit p_2 beträgt also 231/891 ≈ 25,9 %



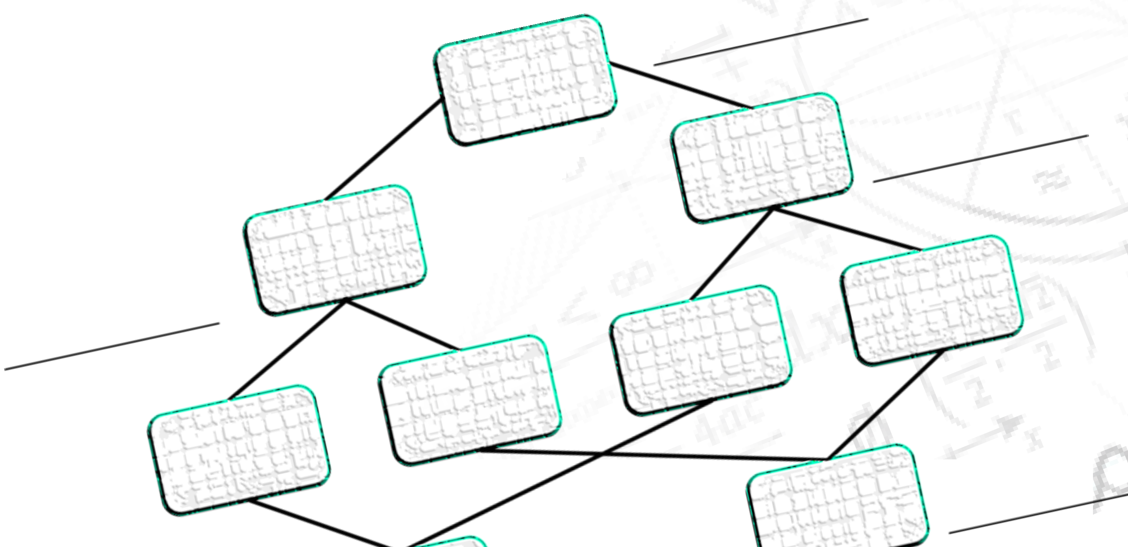
Universität Regensburg

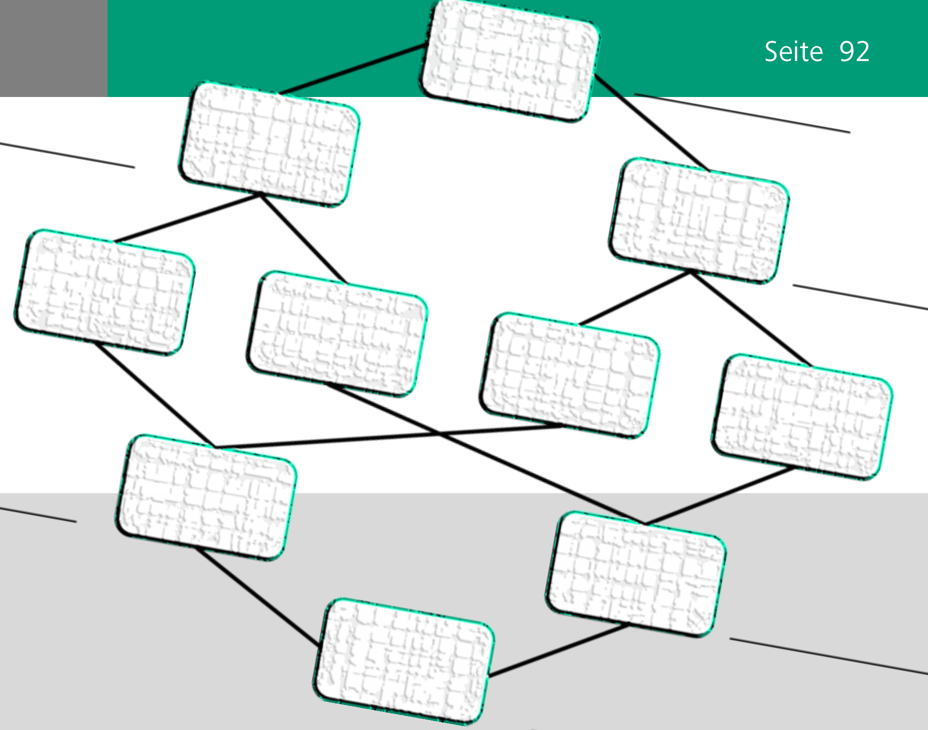
Anhang

Anhang 1: Beispiel für eine Abituraufgabe

Anhang 2: Empirische Studien zu Häufigkeitsbäumen

Anhang 3: **Bei welchen Aufgaben „funktionieren“ Häufigkeitsdoppelbäume?**





Anhang 3:
Bei welchen Aufgaben „funktionieren“ Häufigkeitsdoppelbäume?

Im Anhang 3 wird schließlich die Frage thematisiert, ob Häufigkeitsdoppelbäume wirklich bei allen Aufgaben zu bedingten Wahrscheinlichkeiten verständnisfördernd sind.

Universität Regensburg

Prinzipiell lassen sich alle Aufgaben zu bedingten Wahrscheinlichkeiten mit Häufigkeitsdoppelbäumen lösen.

Dies ist aber gerade bei Aufgaben zu *mehrstufigen Zufallsexperimenten* nicht immer intuitiver als mit Wahrscheinlichkeiten.

Hausaufgabe:
Lösen Sie eine beliebige Aufgabe aus dem Schulbuch zum zweimaligen Ziehen aus einer Urne mit einem Häufigkeitsdoppelbaum, und zwar für die Fälle

a) Mit Zurücklegen
b) Ohne Zurücklegen

Tipp: Die Zahl in den Knoten entspricht dabei *nicht* der Zahl der Kugeln, sondern der imaginären Anzahl der Durchführungen dieses Zufallsexperiments.

Bei Aufgaben dieser Art (sowie bei klassischen Aufgaben zum Werfen eines Würfels oder einer Münze die ebenfalls von der Struktur „2 Merkmale mit 2 Ausprägungen“ abweichen) ist ein Häufigkeitsbaum nicht notwendigerweise verständnisfördernd.