Daten und Zufall im LehrplanPLUS


FUJIFILM
sense and simplicity
Bud
Bud
AVAYA
adidas

Gliederung:

- **Gegenstandsbereich Daten und Zufall**
  Vergleich: Bisheriger Lehrplan - LehrplanPLUS
- **Neue Inhalte im LehrplanPLUS:**
  - **Median**
  - **Quartile**
  - **Sigma-Regeln**
  - **Normalverteilung**

Daten und Zufall

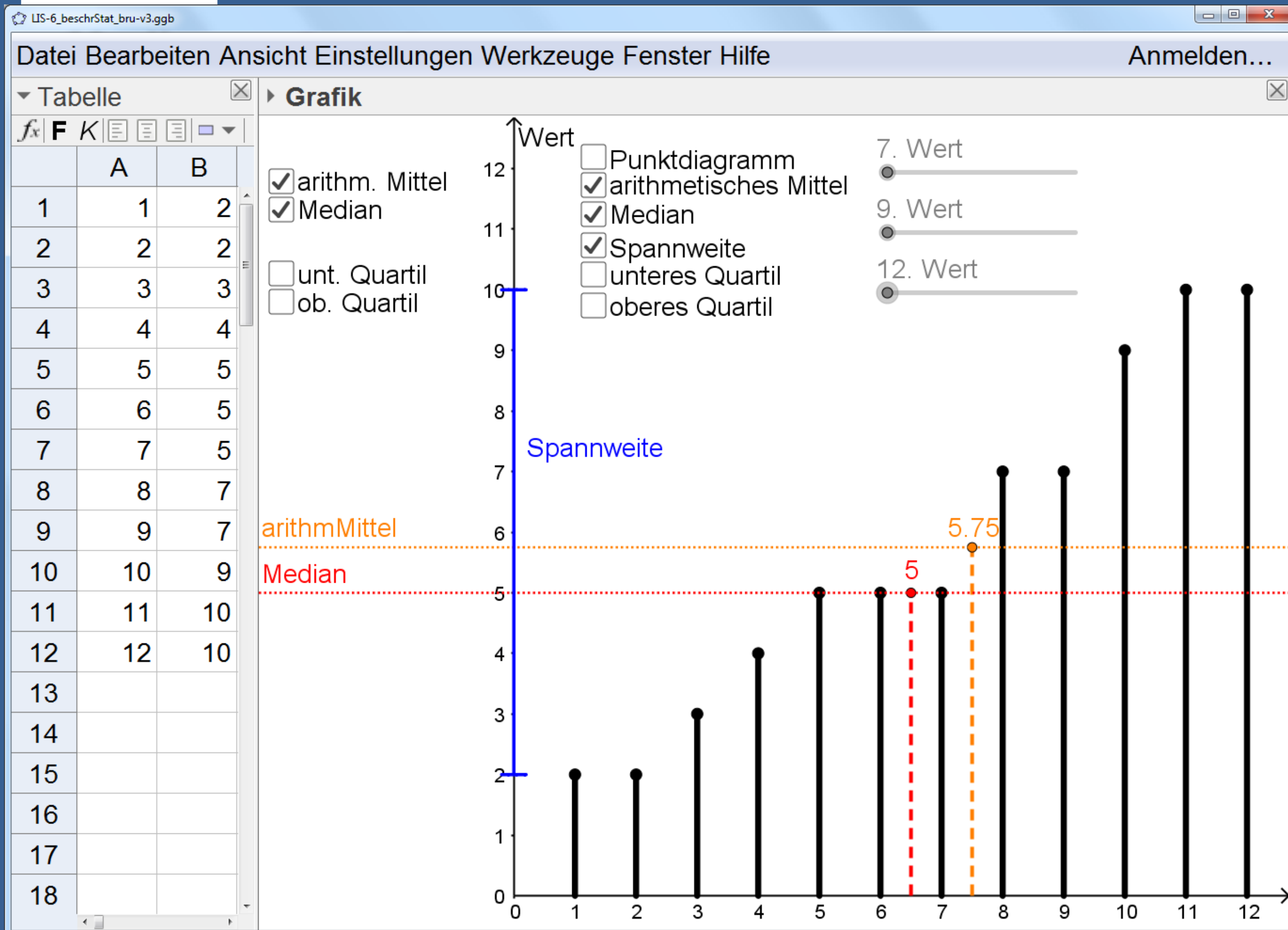
	Bisheriger Lehrplan	LehrplanPlus
5	Zählprinzip, ~~Diagramme~~	Zählprinzip
6	Relative Häufigkeit, Diagramme	Relative Häufigkeit, Beschreibende Statistik (Median, Quartil)
7	Arithm. Mittel, Daten, ~~Diagramme~~	Laplace-Experimente
8	Laplace-Experimente	Ereignis-Algebra Vierfeldertafel
9	Pfadregeln, Baumdiagramme, ~~Stoch. Simulationen~~	Pfadregeln, Baumdiagramme
10	Bedingte Wahrscheinlichkeit, Vierfeldertafel	Bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängige Ereignisse
11	Axiomatik, Ereignis-Algebra, Unabhängige Ereignisse	Axiomatik, Zufallsgrößen, Binomialverteilung, (Sigma-Regeln)
12	Zufallsgrößen, Binomialverteilung, Einseitiger Signifikanztest	Normalverteilung (ca. 10h) Einseitiger Signifikanztest

<u>Median</u>

LehrplanPLUS Jgst. 6:

- stellen Daten mithilfe von aussagekräftigen Tabellen und Graphiken unter Verwendung von relativen und absoluten Häufigkeiten strukturiert dar und diskutieren Vor- und Nachteile unterschiedlicher Darstellungen; im Rahmen der Interpretation der Daten setzen sie auch Fachbegriffe der beschreibenden Statistik (<u>arithmetisches Mittel, Median, Spannweite und Quartil</u>) ein.

Median Geogebra



Vergleich: Median - arithmetisches Mittel

Median ist gegenüber Ausreißern robust

<u>Median</u>

Mittleres Einkommen – Durchschnittliches Einkommen

Mittleres Einkommen: Median

Durchschnittliches Einkommen: Arithmetisches Mittel

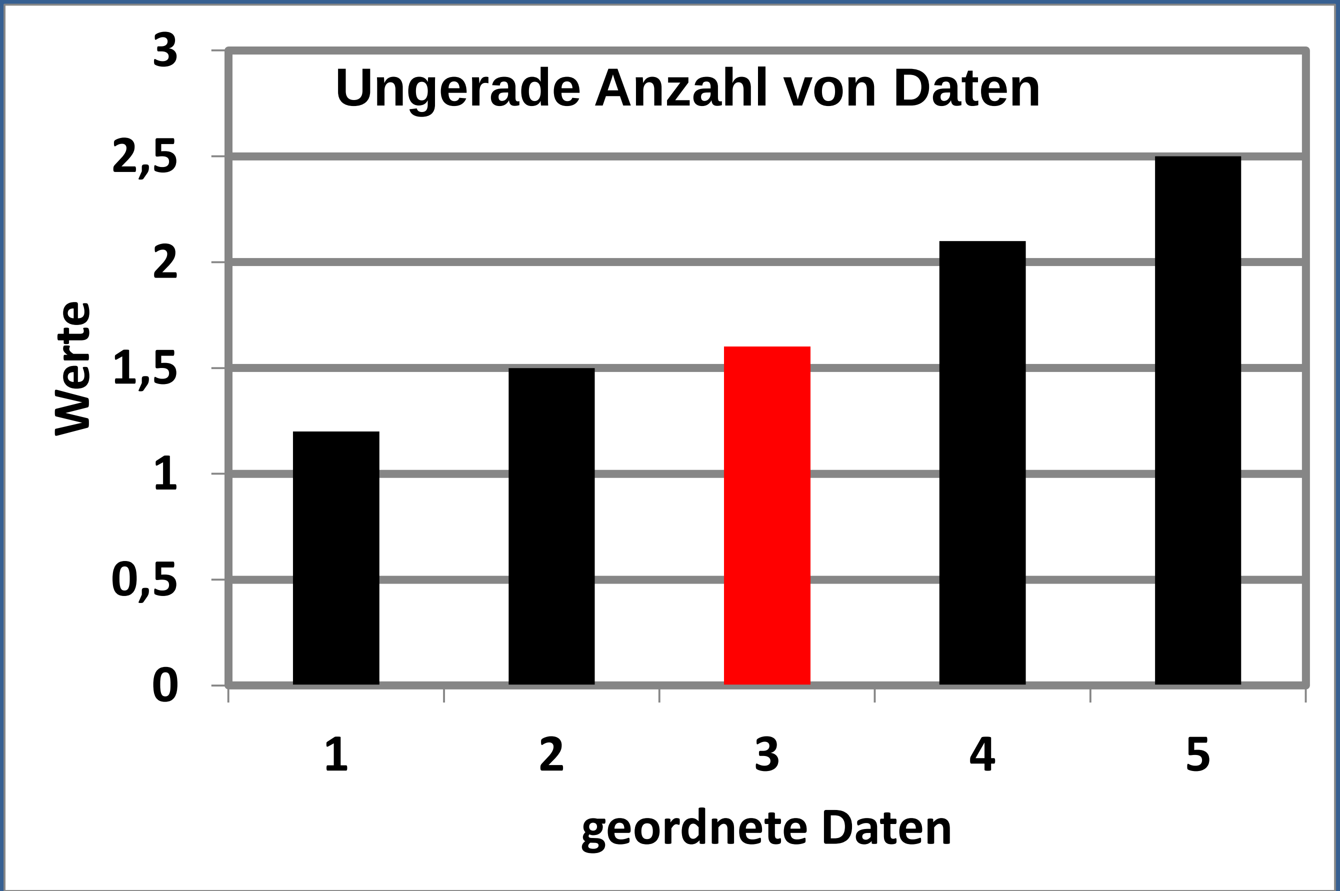
In einem Ort mit 24 000 Einwohnern lebt ein Milliardär, dessen Einkommen 2015 etwa 1,2 Mrd. Euro betrug.

<u>Mittleres Einkommen</u> eines Haushalts (Annahme: es gibt nur Zwei-Personenhaushalte) in diesem Ort: 50 000€

<u>Durchschnittliches Einkommen</u> eines Haushalts (Annahme: es gibt nur Zwei-Personenhaushalte) in diesem Ort: 150 000€

Median

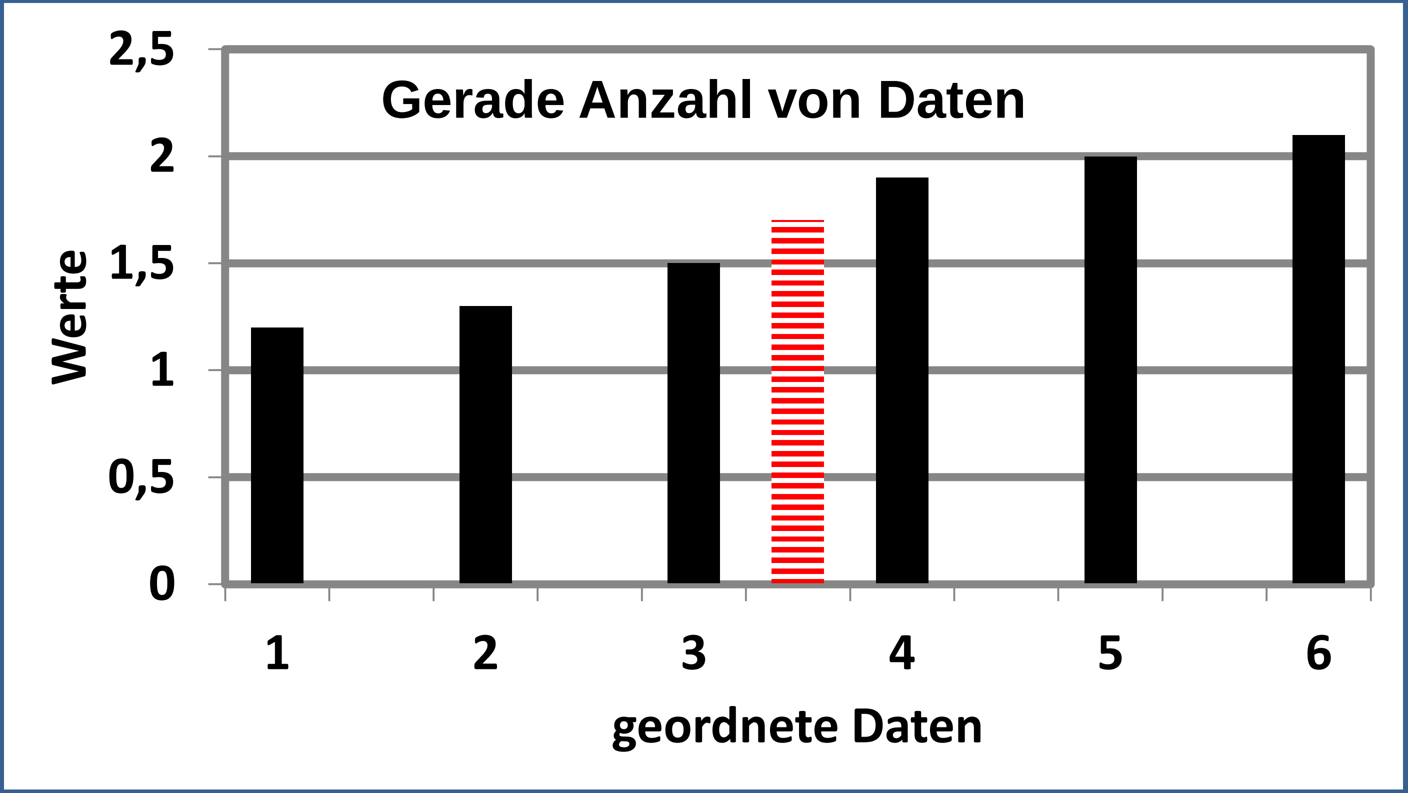
Definition: Ein Median der n Skalenwerte $x_1, \ldots, x_n$ ist jede Zahl M mit der Eigenschaft:
Höchstens 50% der Skalenwerte sind kleiner als M und höchstens 50% der Skalenwerte sind größer als M.



Median

Definition: Ein Median der n Skalenwerte $x_1, \ldots, x_n$ ist jede Zahl M mit der Eigenschaft:

Höchstens 50% der Skalenwerte sind kleiner als M und höchstens 50% der Skalenwerte sind größer als M.



Bemerkung: Der Median ist keine Platzziffer; er gehört zu den Daten oder einem Wert zwischen zwei Daten.

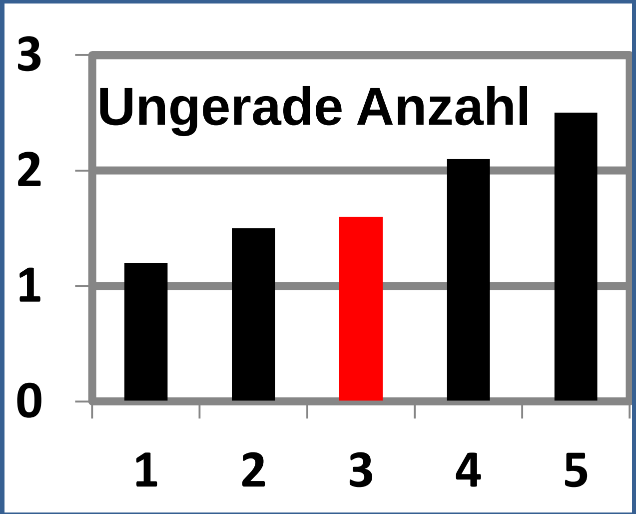
Median

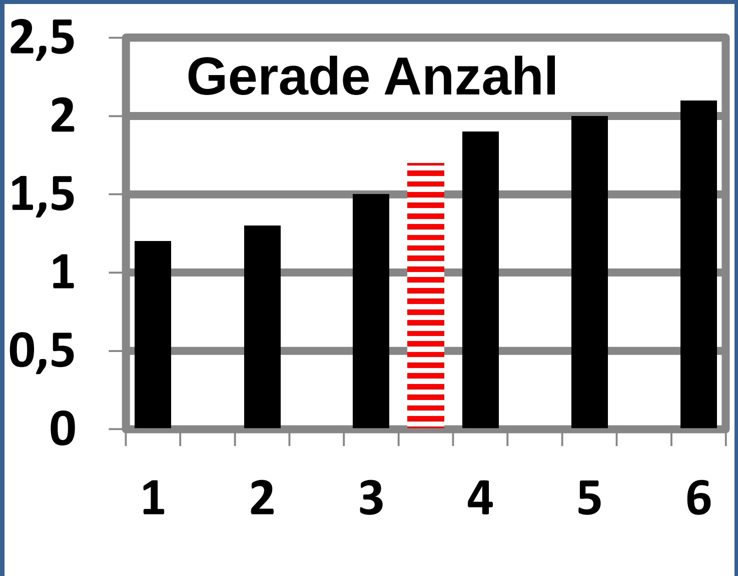
Definition: Ein Median der n Skalenwerte $x_1, \ldots, x_n$ ist jede Zahl M mit der Eigenschaft:

Höchstens 50% der Skalenwerte sind kleiner als M und höchstens 50% der Skalenwerte sind größer als M.

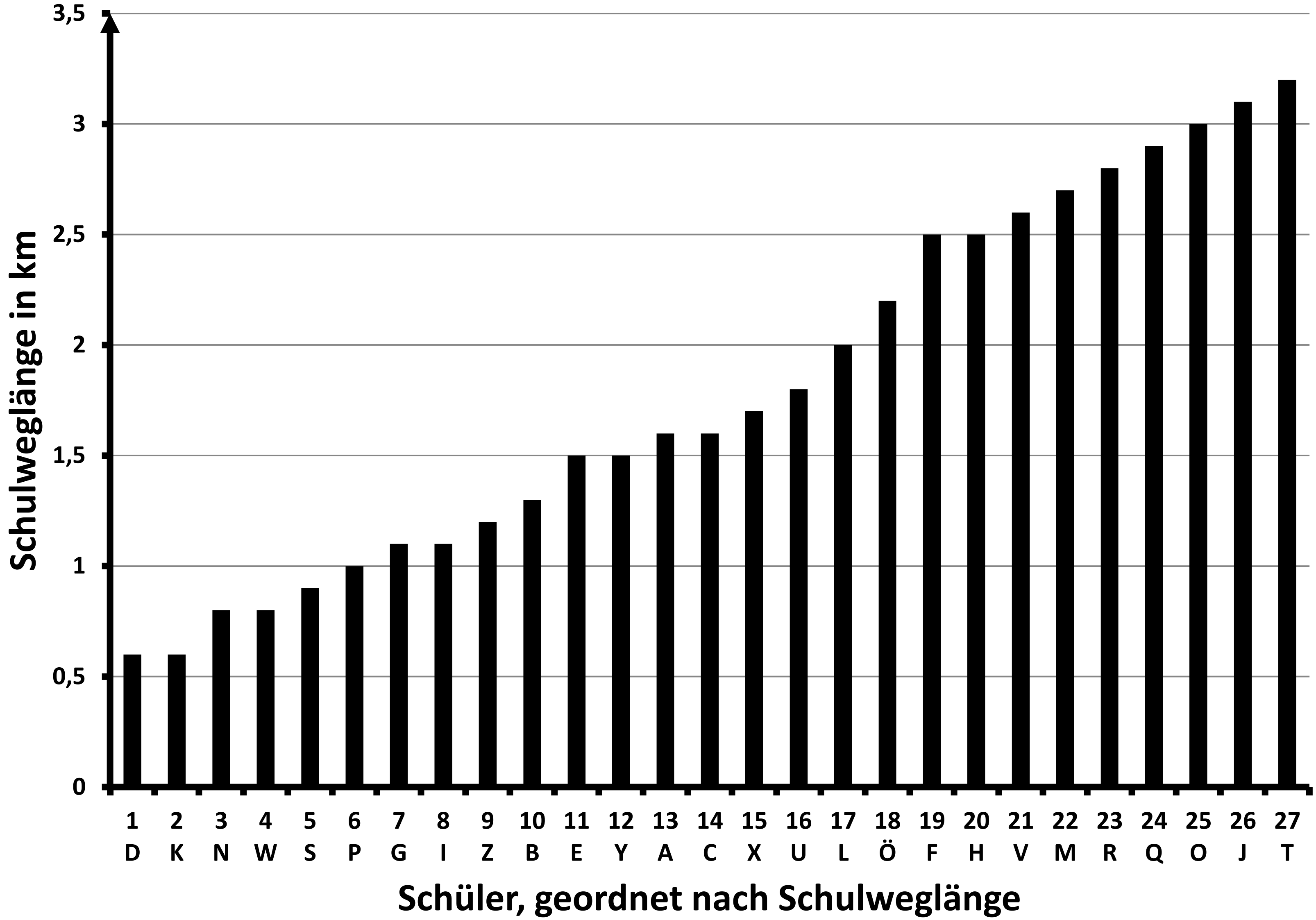
Bemerkung: Nach Definition ist der Median nicht immer eindeutig.

Schülergerechte Definition: Der Median ist bei ungerader Anzahl von Daten der Wert in der Mitte der geordneten Datenreihe, bei gerader Anzahl das arithmetische Mittel der beiden in der Mitte stehenden Werte.



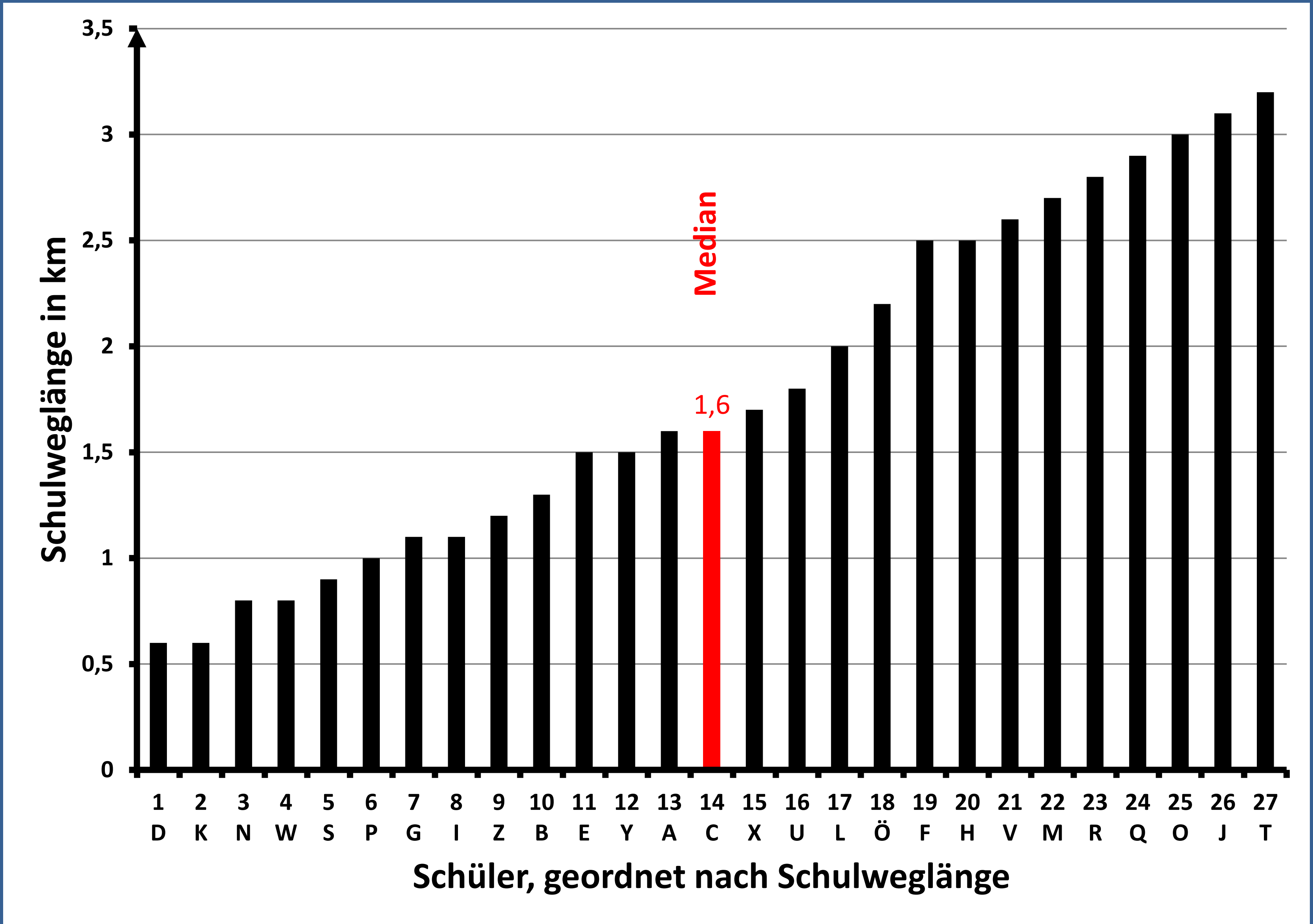


Quartile



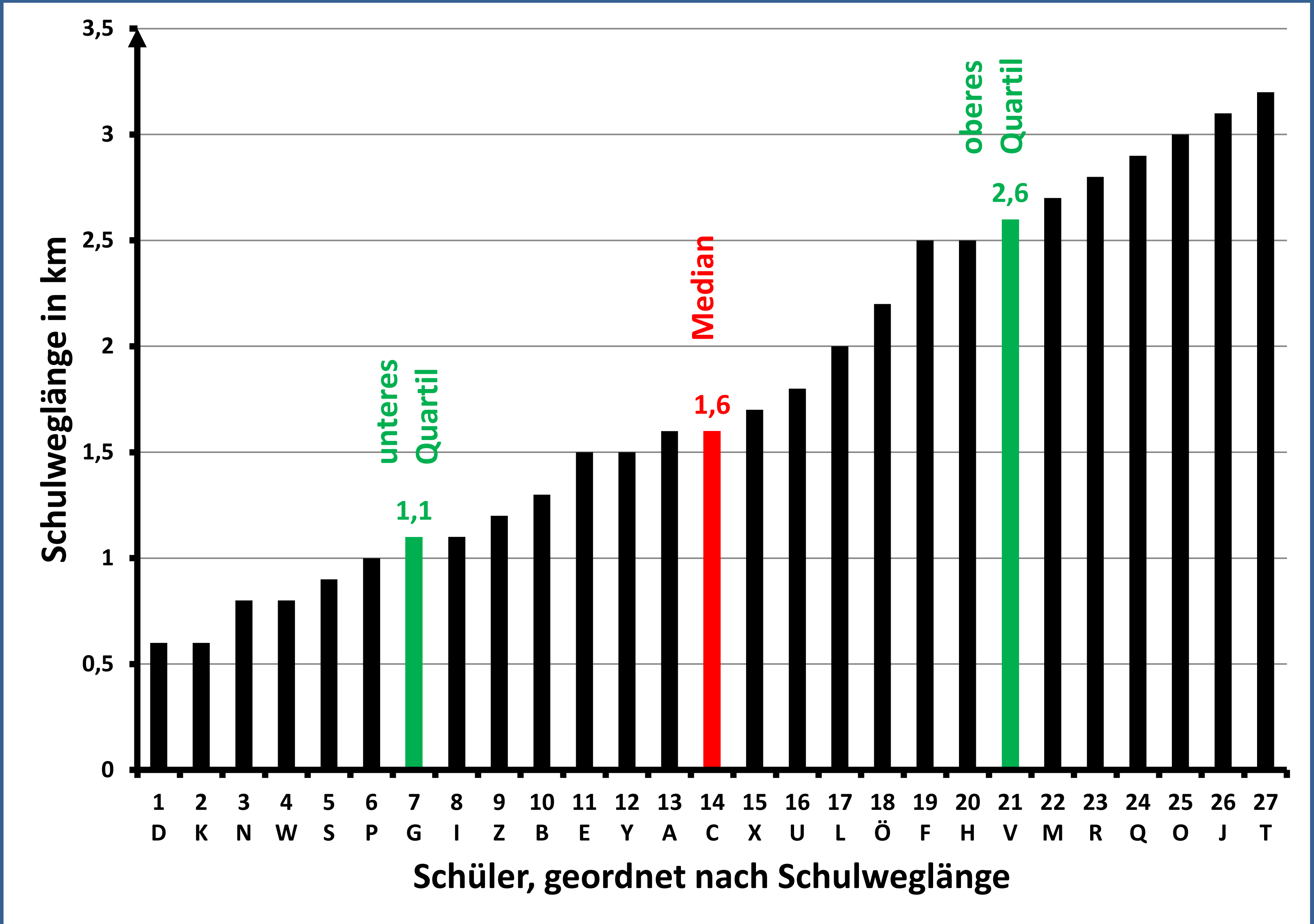
Schulweglänge in km
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27
D K N W S P G I Z B E Y A C X U L Ö F H V M R Q O J T
Schüler, geordnet nach Schulweglänge

Quartile



Schulweglänge in km
3,5
3
2,5
2
1,5
1
0,5
0
Median
1,6
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27
D K N W S P G I Z B E Y A C X U L Ö F H V M R Q O J T
Schüler, geordnet nach Schulweglänge

Quartile



Schulweglänge in km
3,5
3
2,5
2
1,5
1
0,5
0
oberes Quartil
2,6
Median
1,6
unteres Quartil
1,1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27
D K N W S P G I Z B E Y A C X U L Ö F H V M R Q O J T
Schüler, geordnet nach Schulweglänge

Quartile

Quantil

Definition: Es sei $0 < p \leq 100$. Ein p%-Quantil der Skalenwerte $x_1, \ldots, x_n$ ist jede Zahl $Q_{p\%}$ mit der Eigenschaft:
Höchstens p% der Skalenwerte sind kleiner als $Q_{p\%}$ und höchstens (1-p)% der Skalenwerte sind größer als $Q_{p\%}$.

Quartil

Definition: Die 25%-, 50%-, und 75%-Quantile heißen auch erstes, zweites und drittes Quartil.

Quartile

Bemerkung: Die Quantile und damit auch Quartile sind keine Platzziffern; sie sind Werte von Daten oder liegen zwischen den Werten von zwei Daten.

Bemerkung: Die Quantile und damit auch Quartile sind nicht immer eindeutig festgelegte Zahlen.

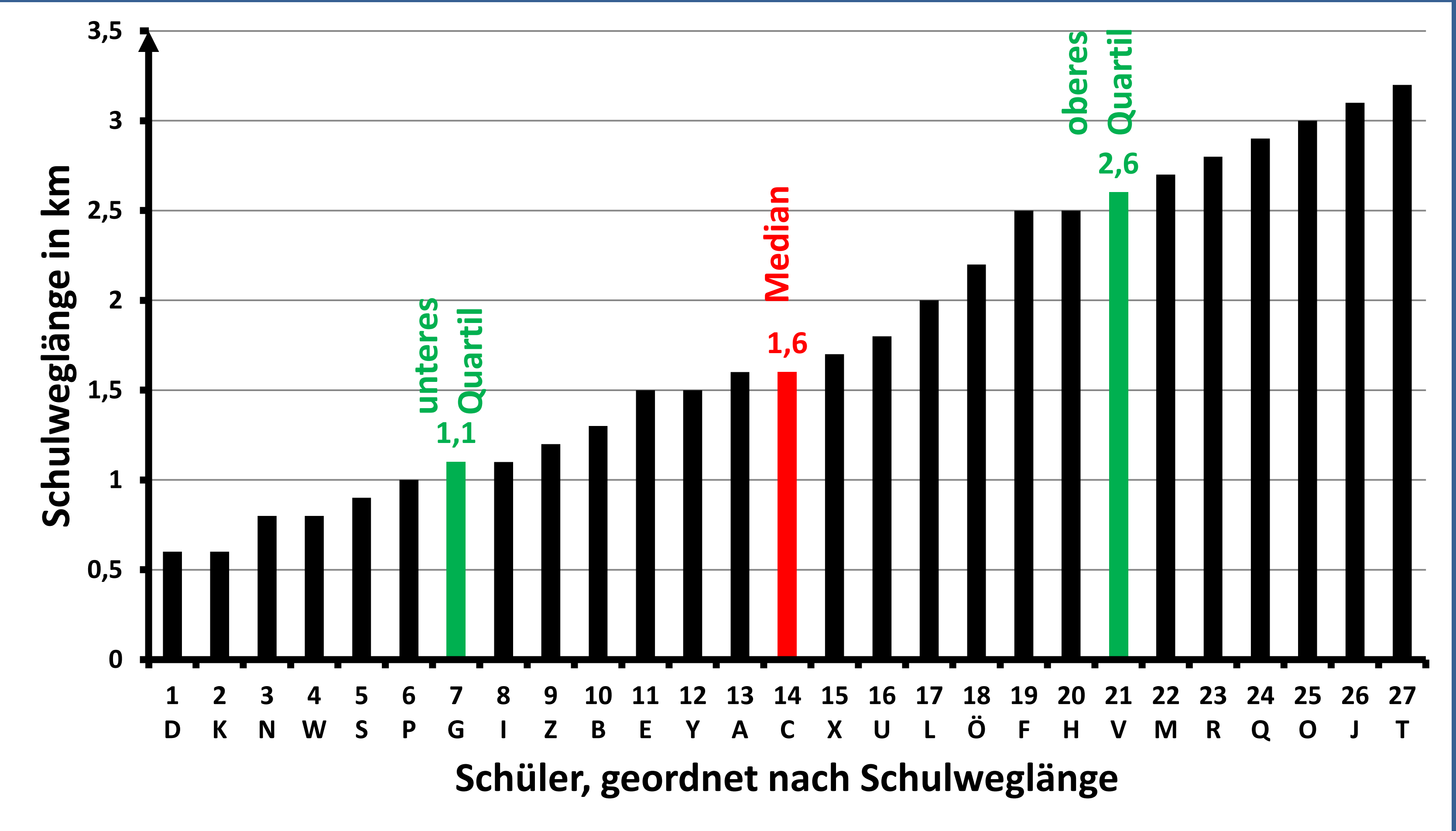
Quartile

Bemerkung:

Quartile werden häufig in zweierlei Hinsicht verwendet:

- Wie eben definiert, als Werte oder Zwischenwerte von Daten

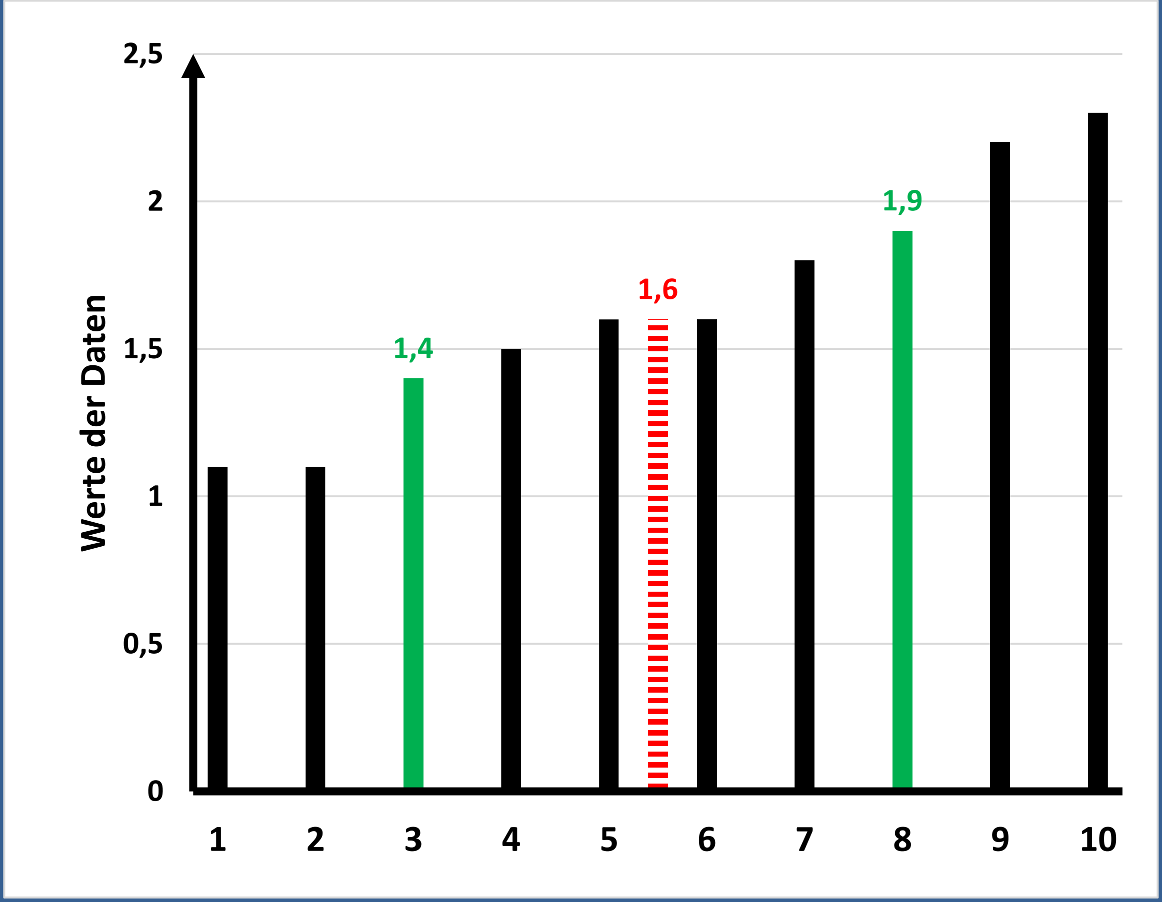
- Als Bereiche von Daten (z.B. Bea liegt beim Schulweg im 2.Quartil)



Quartile

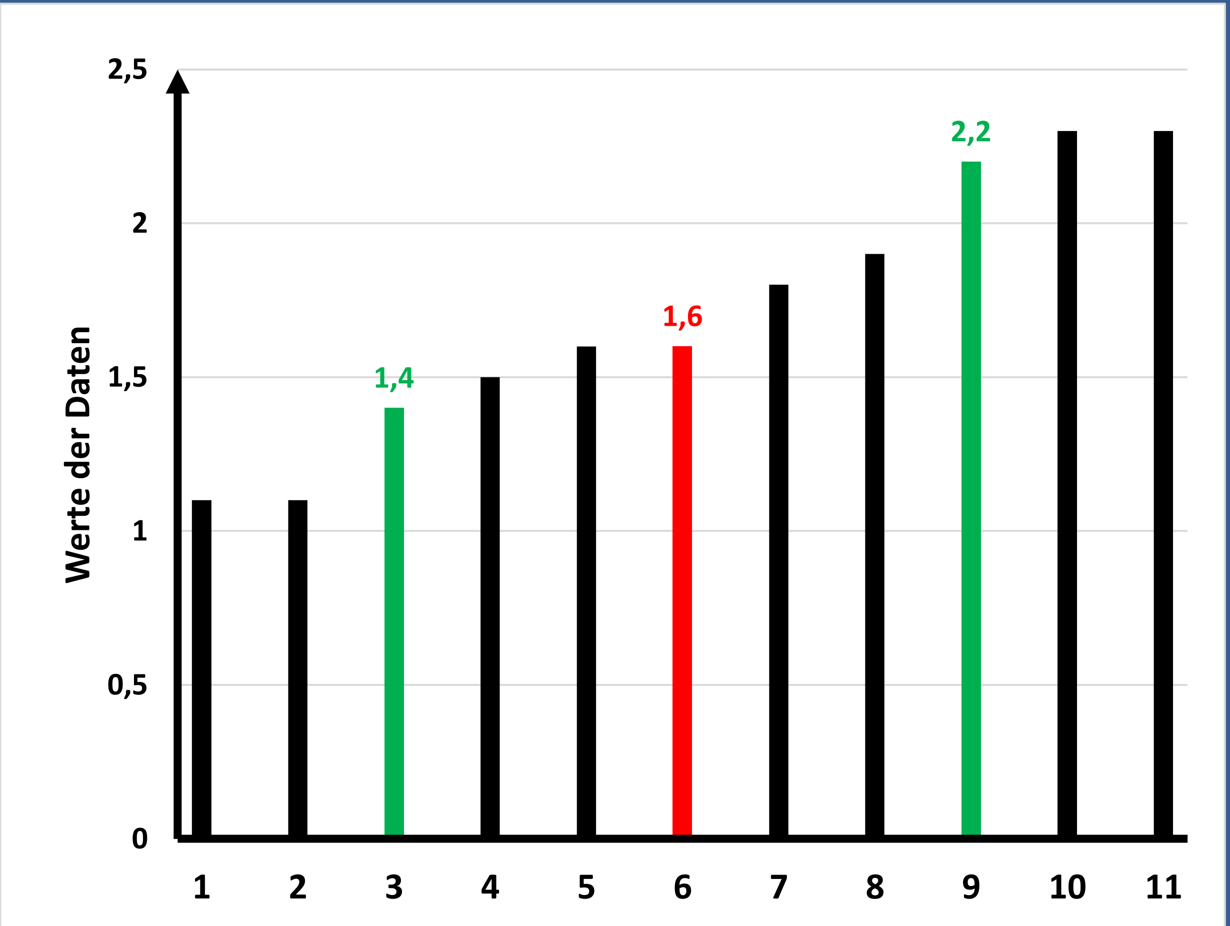
Schülergerechte Definition: Der Median „zerlegt“ die geordnete Datenreihe in einen unteren und einen oberen Block.

Das untere Quartil ist der Median des unteren Blocks der geordneten Datenreihe, das obere Quartil der Median des oberen Blocks.



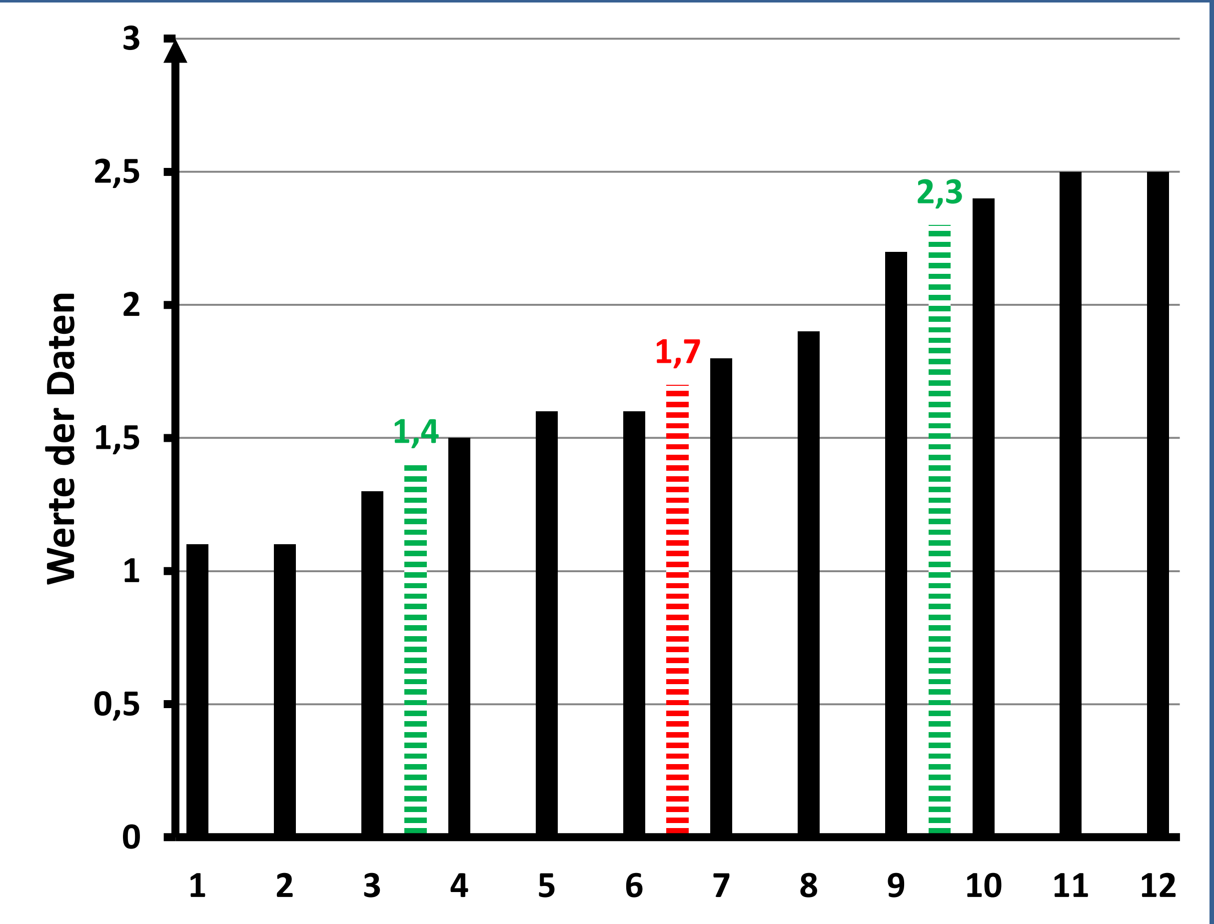
Quartile

Schülergerechte Definition: Der Median „zerlegt“ die geordnete Datenreihe in einen unteren und einen oberen Block.
Das <u>untere Quartil</u> ist der Median des unteren Blocks der geordneten Datenreihe, das <u>obere Quartil</u> der Median des oberen Blocks.



Quartile

Schülergerechte Definition: Der Median „zerlegt“ die geordnete Datenreihe in einen unteren und einen oberen Block.
Das <u>untere Quartil</u> ist der Median des unteren Blocks der geordneten Datenreihe, das <u>obere Quartil</u> der Median des oberen Blocks.



Quartile

Quartile

One of the four divisions of observations which have been grouped into four equal-sized sets based on their statistical rank. The quartile including the top statistically ranked members is called the first quartile and denoted Q_1. The other quartiles are similarly denoted Q_2, Q_3, and Q_4. For N data points with N of the form $4n+5$ (for $n = 0$, 1, ...), the hinges are identical to the first and third quartiles.

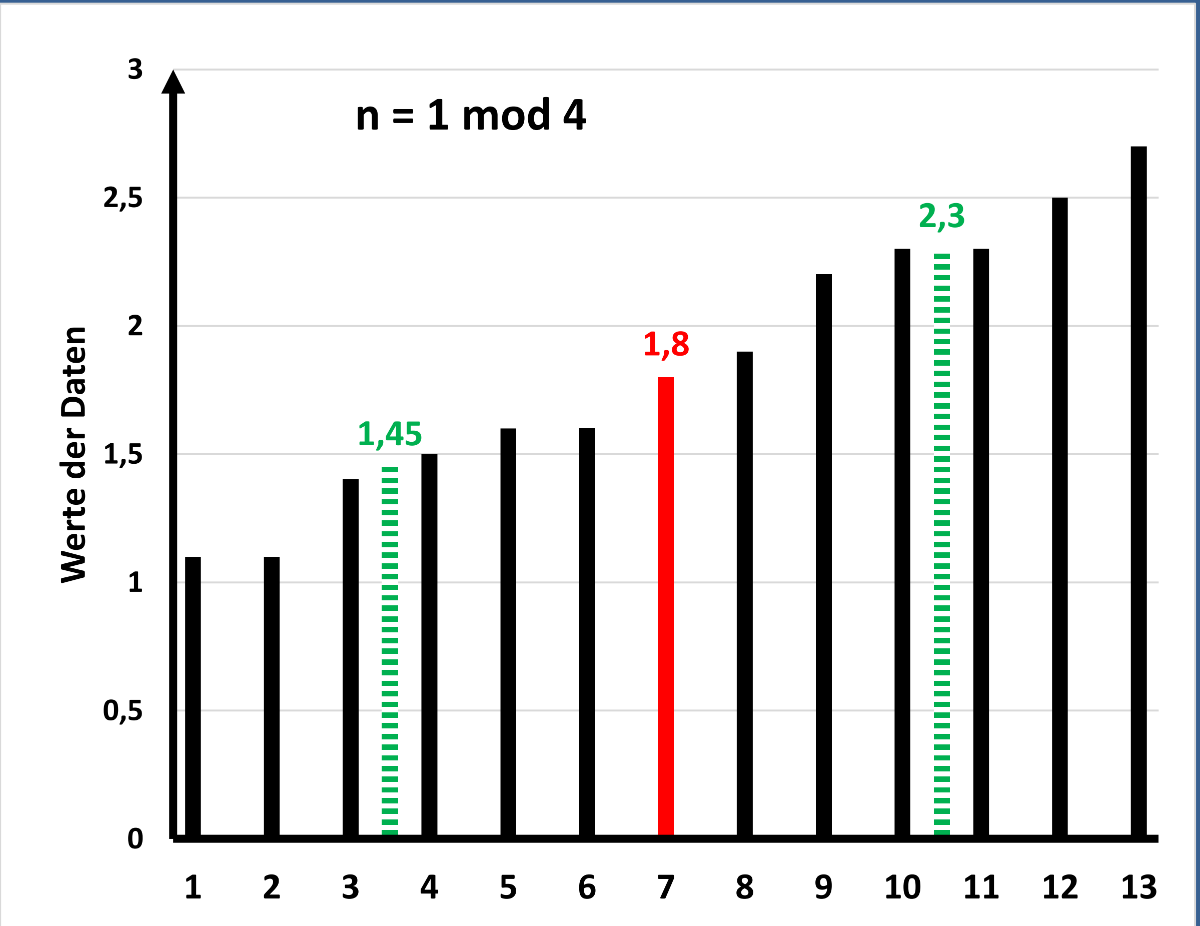
The following table summarizes a number of common methods for computing the position of the first and third quartiles from a sample size n (P. Stikker, pers. comm., Jan. 24, 2005). In the table, $[x]$ denotes the nearest integer function.

method	1st quartile	1st quartile	3rd quartile	3rd quartile
	n odd	n even	n odd	n even
Minitab	$\frac{n+1}{4}$	$\frac{n+1}{4}$	$\frac{3n+3}{4}$	$\frac{3n+3}{4}$
Tukey (Hoaglin et al. 1983)	$\frac{n+3}{4}$	$\frac{n+2}{4}$	$\frac{3n+1}{4}$	$\frac{3n+2}{4}$
Moore and McCabe (2002)	$\frac{n+1}{4}$	$\frac{n+2}{4}$	$\frac{3n+3}{4}$	$\frac{3n+2}{4}$
Mendenhall and Sincich (1995)	$\left[\frac{n+1}{4}\right]$	$\left[\frac{n+1}{4}\right]$	$\left[\frac{3n+3}{4}\right]$	$\left[\frac{3n+3}{4}\right]$
Freund and Perles (1987)	$\frac{n+3}{4}$	$\frac{n+3}{4}$	$\frac{3n+1}{4}$	$\frac{3n+1}{4}$

SEE ALSO:
Hinge, Interquartile Range, Percentile, Quantile, Quartile Deviation, Quartile Variation Coefficient

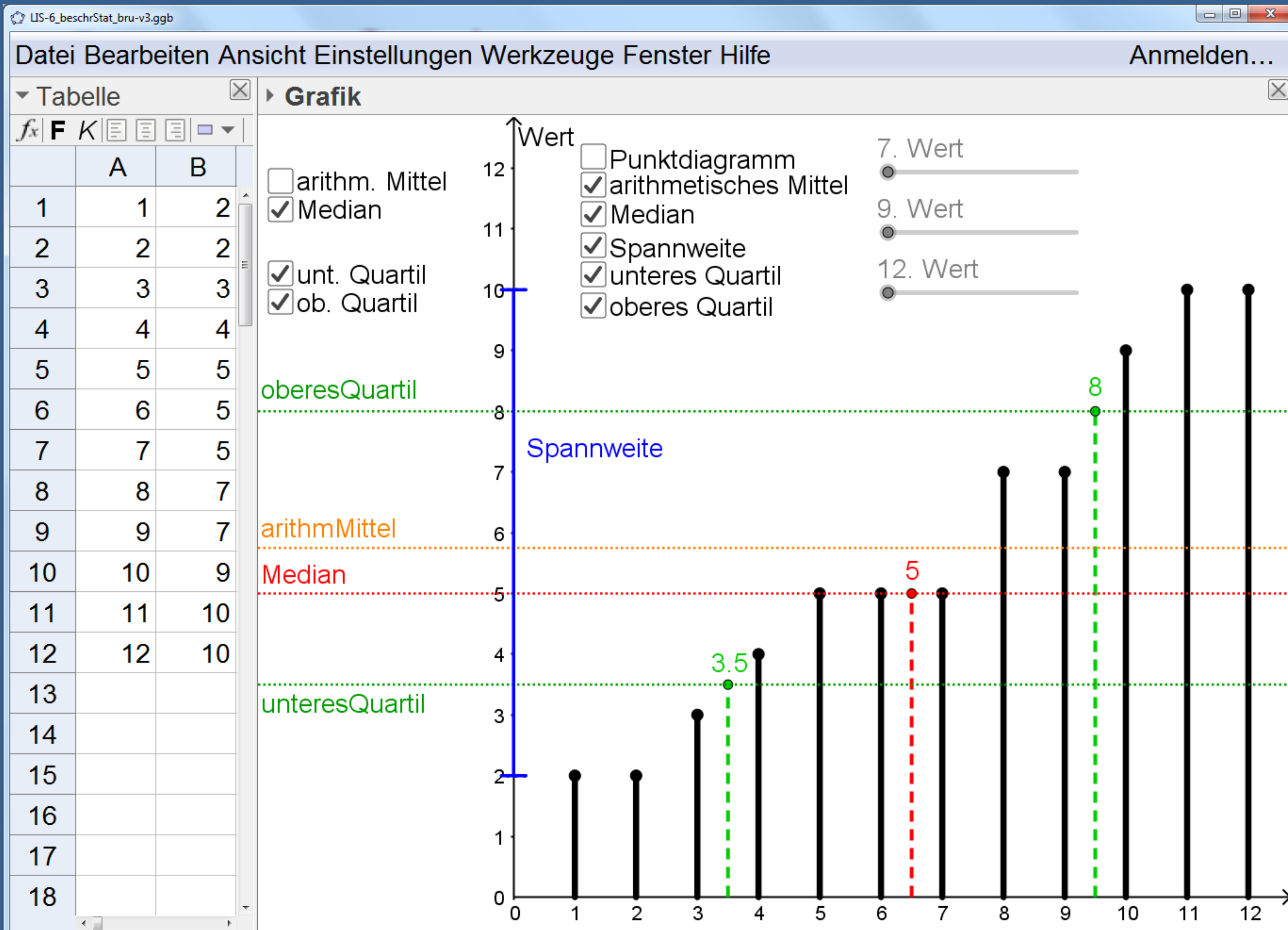
Quartile

Schülergerechte Definition: Der Median „zerlegt“ die geordnete Datenreihe in einen unteren und einen oberen Block.
Das <u>untere Quartil</u> ist der Median des unteren Blocks der geordneten Datenreihe, das <u>obere Quartil</u> der Median des oberen Blocks.

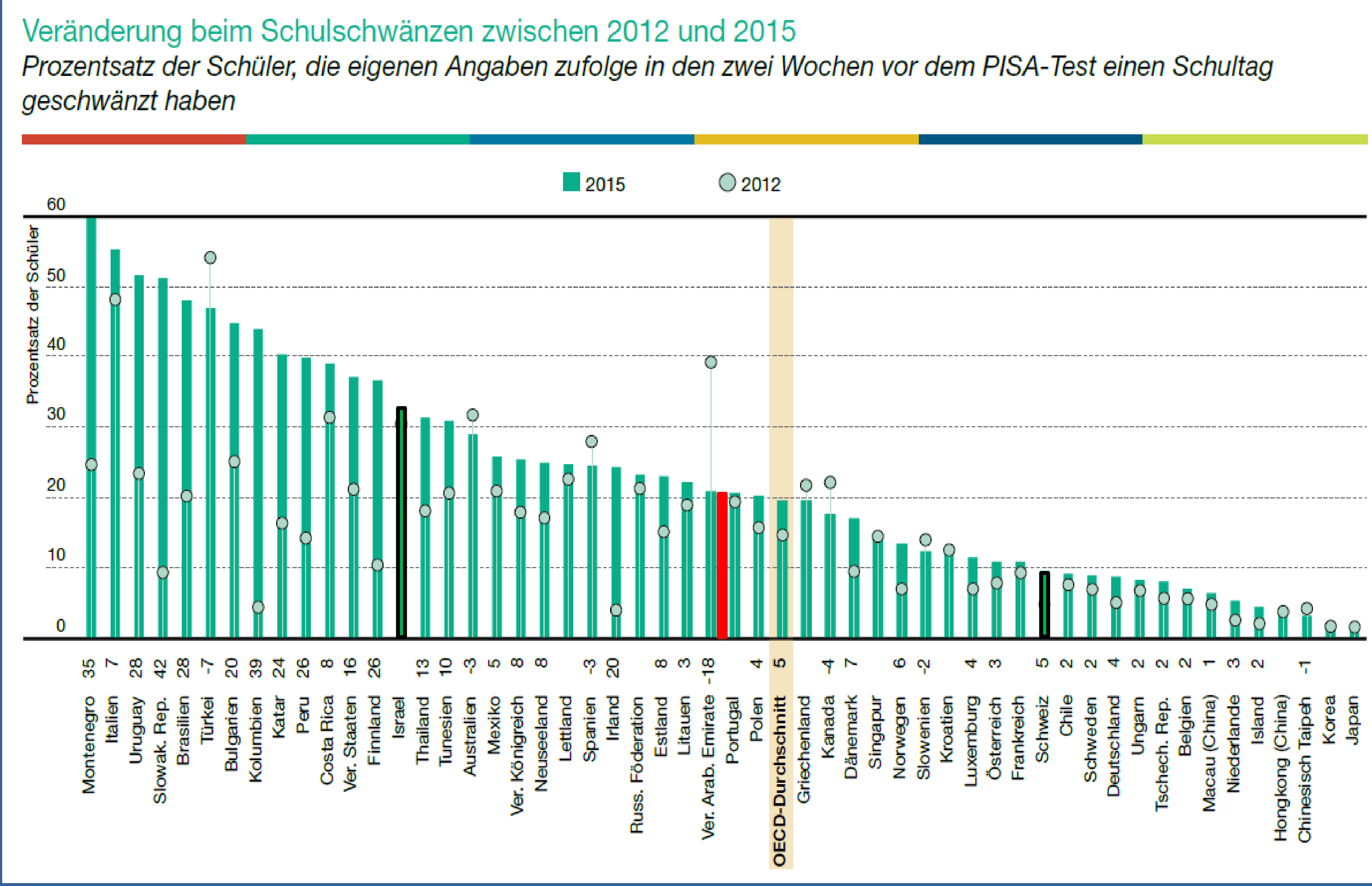


Wenn n = 1 mod 4, dann geringfügige Abweichungen von der strengen Definition.

Quartile   Geogebra



Quartile

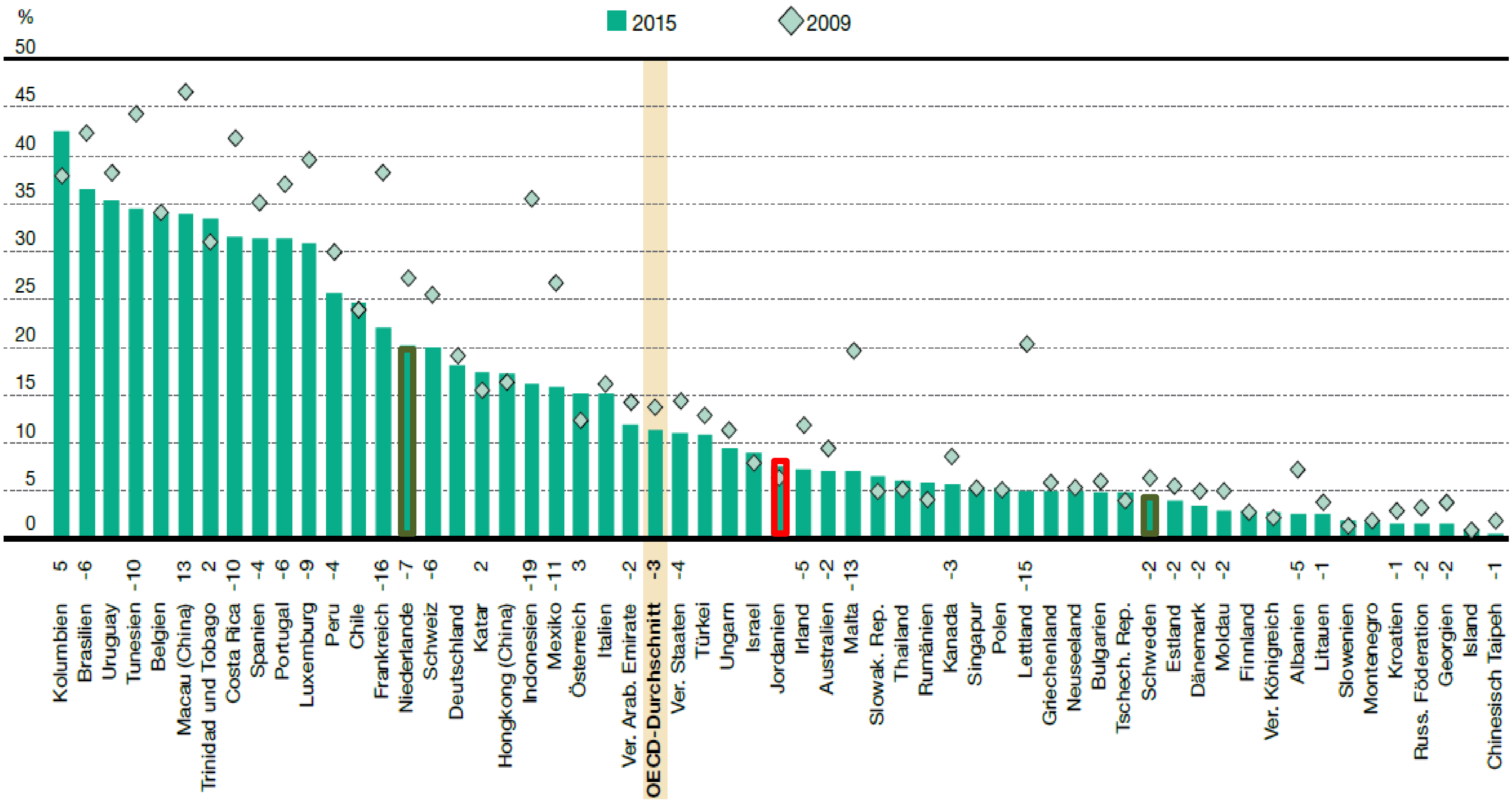


Veränderung beim Schulschwänzen zwischen 2012 und 2015
Prozentsatz der Schüler, die eigenen Angaben zufolge in den zwei Wochen vor dem PISA-Test einen Schultag geschwänzt haben
2015
2012
Prozentsatz der Schüler
60
50
40
30
20
10
0
35 Montenegro
7 Italien
28 Uruguay
42 Slowak. Rep.
28 Brasilien
-7 Türkei
20 Bulgarien
39 Kolumbien
24 Katar
26 Peru
8 Costa Rica
16 Ver. Staaten
26 Finnland
Israel
13 Thailand
10 Tunesien
-3 Australien
5 Mexiko
8 Ver. Königreich
8 Neuseeland
Lettland
-3 Spanien
20 Irland
Russ. Föderation
8 Estland
3 Litauen
-18 Ver. Arab. Emirate
Portugal
4 Polen
5 OECD-Durchschnitt
Griechenland
-4 Kanada
7 Dänemark
Singapur
6 Norwegen
-2 Slowenien
Kroatien
4 Luxemburg
3 Österreich
Frankreich
5 Schweiz
2 Chile
2 Schweden
4 Deutschland
2 Ungarn
2 Tschech. Rep.
2 Belgien
1 Macau (China)
3 Niederlande
2 Island
Hongkong (China)
-1 Chinesisch Taipeh
Korea
Japan

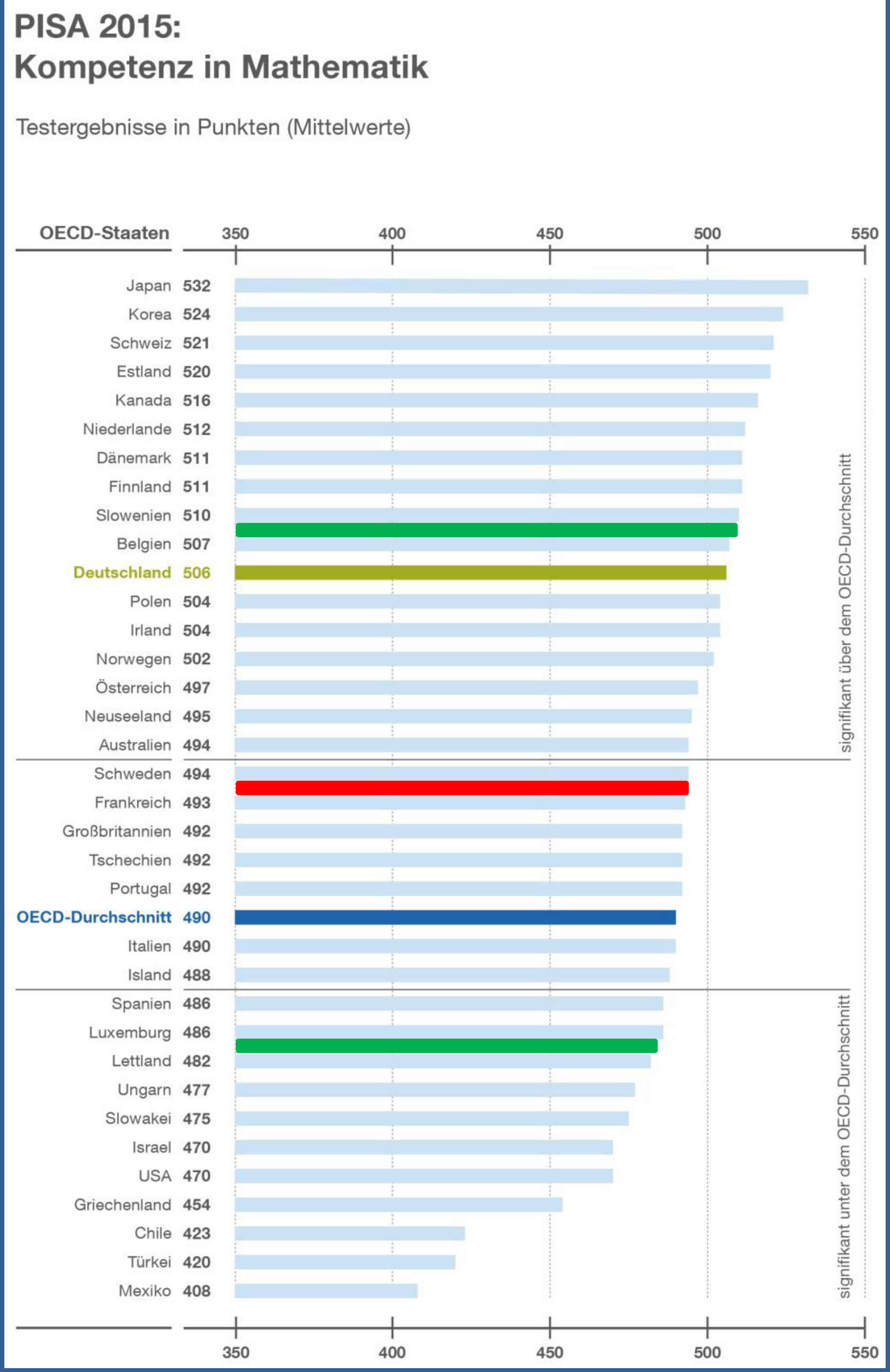
Quartile

Veränderung bei den Klassenwiederholungsraten zwischen 2009 und 2015

Prozentsatz der Schüler, die im Grund- oder Sekundarbereich eine Klasse wiederholt haben



Quartile


PISA 2015:
Kompetenz in Mathematik
Testergebnisse in Punkten (Mittelwerte)
OECD-Staaten
350
400
450
500
550
Japan 532
Korea 524
Schweiz 521
Estland 520
Kanada 516
Niederlande 512
Dänemark 511
Finnland 511
Slowenien 510
Belgien 507
Deutschland 506
Polen 504
Irland 504
Norwegen 502
Österreich 497
Neuseeland 495
Australien 494
Schweden 494
Frankreich 493
Großbritannien 492
Tschechien 492
Portugal 492
OECD-Durchschnitt 490
Italien 490
Island 488
Spanien 486
Luxemburg 486
Lettland 482
Ungarn 477
Slowakei 475
Israel 470
USA 470
Griechenland 454
Chile 423
Türkei 420
Mexiko 408
signifikant über dem OECD-Durchschnitt
signifikant unter dem OECD-Durchschnitt

Sigma-Regeln

LehrplanPLUS Jgst. 11:

- berechnen mithilfe der Parameter der Binomialverteilung den Erwartungswert und die Standardabweichung von binomialverteilten Zufallsgrößen, wenden die Sigma-Regeln an und erläutern – auch unter Nutzung einer dynamischen Mathematiksoftware – den Einfluss der Parameter auf die graphische Darstellung der Binomialverteilung.

Sigma-Regeln

Intelligenzquotient

Normierung: $\mu = 100$ und $\sigma = 15$

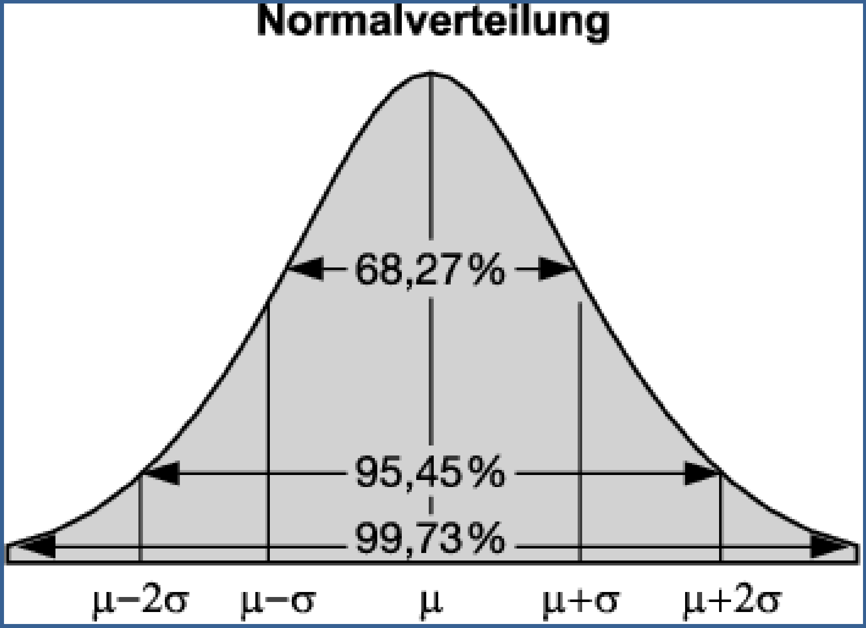
Geogebra

Sigma-Regeln für normalverteilte Zufallsgrößen:

$P(|X - \mu| \leq \sigma) = 68{,}27\%$

$P(|X - \mu| \leq 2\sigma) = 95{,}45\%$

$P(|X - \mu| \leq 3\sigma) = 99{,}73\%$



Sigma-Regeln

Sigma-Regeln für normalverteilte Zufallsgrößen:

$P(|X - \mu| \leq \sigma) = 68{,}27\%$

$P(|X - \mu| \leq 2\sigma) = 95{,}45\%$

$P(|X - \mu| \leq 3\sigma) = 99{,}73\%$

Geogebra

Die Sigma-Regeln für normalverteilte Zufallsgrößen können auf binomialverteilte Zufallsgrößen übertragen werden, wenn die Faustregel $n \cdot p \cdot q > 9$ erfüllt ist.

Normalverteilung

Lehrplan Jgst. 12

- begründen die Bedeutung der Normalverteilung damit, dass die Erhebung von Merkmalen aus unterschiedlichsten Bereichen (z. B. Intelligenz-quotient, zufällige Abweichungen vom Sollwert bei Werkstücken) sehr häufig zu glockenförmigen Histogrammen führt.
- erläutern die Eigenschaften der Gauß'schen Funktion sowie die Bedeutung der Parameter μ und σ in deren Funktionsgleichung für den Verlauf des Graphen, z. B. mithilfe einer dynamischen Mathematik-software. Liegt eine Datenerhebung eines (annähernd) normalverteilten Merkmals vor, stellen sie den Zusammenhang zwischen dem Parameter μ der Gauß'schen Funktion und dem Mittelwert der erhobenen Daten her.
- bestimmen mithilfe der Integralfunktion der Gauß'schen Funktion die Wahrscheinlichkeit, dass die Werte der Zufallsgröße in einem bestimmten Intervall liegen. Sie beschreiben den Verlauf und die charakteristischen Eigenschaften des Graphen der Integralfunktion der Gauß'schen Funktion.
- schätzen mithilfe der Sigma-Regeln Wahrscheinlichkeiten ab.

Normalverteilung

- **Normalverteilung als eigenständige Verteilung**

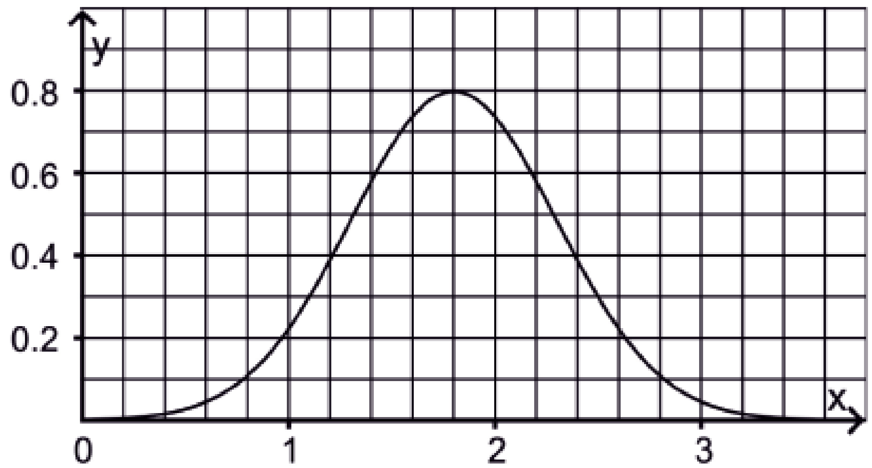
  Im LK: Normalverteilung als Näherung der Binomialverteilung (Moivre-Laplace)

- **Geogebra**

Normalverteilung

Normalverteilung: Bsp. aus den Musteraufgaben für die Abiturprüfung des IQB

	BE
Die Abbildung zeigt den Graphen der Dichtefunktion einer normalverteilten Zufallsgröße X.	



	BE
a Geben Sie den Erwartungswert von X an.	1
b Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass X den Wert 2,4 annimmt.	1
c Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X einen Wert aus dem Intervall $[1;1{,}4]$ annimmt.	3
	5

Vielen Dank