KARIN BINDER, NICOLE STEIB, STEFAN KRAUSS

Das Häufigkeitsnetz

Alle Wahrscheinlichkeiten auf einen Blick erfassen

LERNGRUPPE: 11.–13. Schuljahr

IDEE: Häufigkeitsnetze eignen sich zur gleichzeitigen Darstellung von bedingten Wahrscheinlichkeiten und Schnittwahrscheinlichkeiten

ARBEITSBLATT: Aufgabe zu Wahrscheinlichkeiten

ZEITBEDARF: 2 Unterrichtsstunden

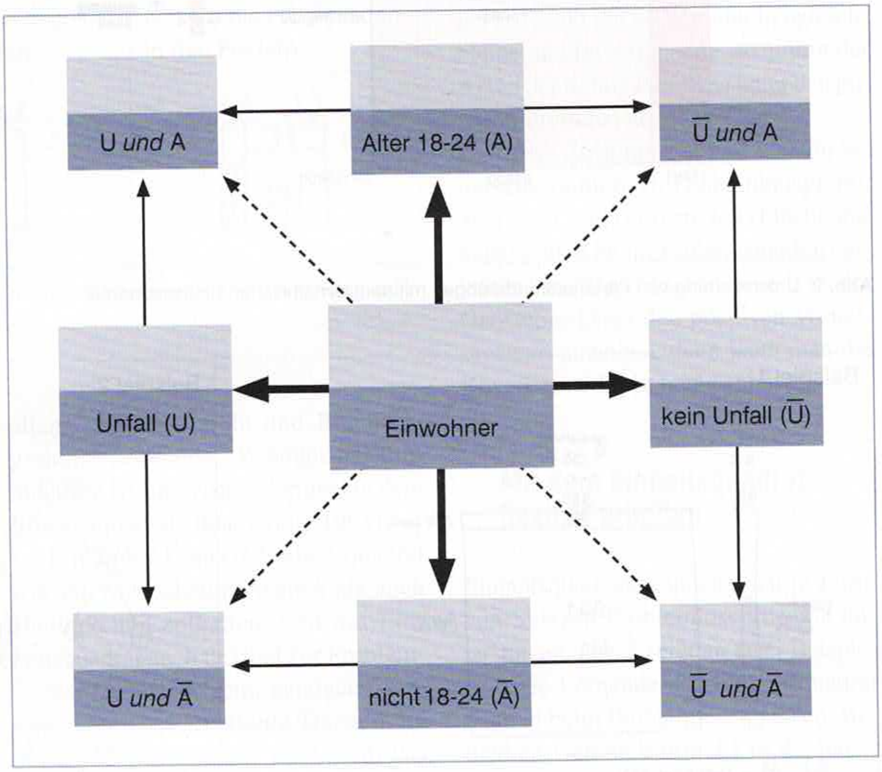


Abb. 1: Beschriftete Struktur des Häufigkeitsnetzes

Im Umgang mit Wahrscheinlichkeiten kommt es häufig zur Verwechslung von *bedingtem* und *bedingendem* Ereignis. Soll die Wahrscheinlichkeit von „A unter der Bedingung B" berechnet werden, also P(A|B), oder hingegen die Wahrscheinlichkeit von „B unter der Bedingung A", also P(B|A)?

Auch US-Präsident Trump verwechselte im Oktober 2020 die Ereignisse einer bedingten Wahrscheinlichkeit in einer Äußerung über die Wirksamkeit von Masken im Schutz gegen Corona: „85 % der Menschen, die eine Maske tragen, fangen sich das Virus ein". Diese Aussage ist eine typische Verwechslung bedingter Wahrscheinlichkeiten. Richtig wäre gewesen: 85 % einer Gruppe von Personen, die mit dem Coronavirus infiziert waren, haben im Juli angegeben, sie hätten in den 14 Tagen zuvor oft oder immer eine Maske getragen.

Neben dieser typischen Verwechslung P(Maske | Corona) = P(Corona | Maske) tritt auch häufig eine Verwechslung mit der Wahrscheinlichkeit P(Maske *und* Corona) auf, die wir im Folgenden als *Schnittwahrscheinlichkeit* bezeichnen werden.

Wie man diese drei Wahrscheinlichkeiten mithilfe eines *Häufigkeitsnetzes* kontrastieren kann, zeigt dieser Beitrag.

Die Grenzen von Baum und Vierfeldertafel

Eigentlich gibt es in der Didaktik der Stochastik ja bereits vielfältige Visualisierungsmöglichkeiten für Wahrscheinlichkeiten. Am häufigsten werden hierbei *Baumdiagramme* und *Vierfeldertafeln* eingesetzt (vgl. den Beitrag **Mit Einheitsquadraten statistisches Verständnis fördern** in dieser Ausgabe). Jedoch können in Baumdiagrammen nur bedingte Wahrscheinlichkeiten (und Randwahrscheinlichkeiten) eingetragen werden und in Vierfeldertafeln nur Schnittwahrscheinlichkeiten (und Randwahrscheinlichkeiten). Eine explizite Abgrenzung der verschiedenen Wahrscheinlichkeitsarten im Unterricht ist so kaum möglich – mit einem Häufigkeitsnetz jedoch schon.

Das Häufigkeitsnetz

Anhand einer typischen Aufgabe zu Häufigkeitkeitsaussagen bei Verkehrsunfällen mit jungen Erwachsenen (vgl. **Arbeitsblatt**, angelehnt an Lambacher Schweizer 11, Bayern, S. 184, Beispiel 3) soll die schrittweise Erstellung und somit auch der konkrete Aufbau eines Häufigkeitsnetzes erläutert werden, der in Binder u. a. (2020) detailliert beschrieben wird.

Erstellen der Häufigkeitsnetz-Struktur

Im ersten Schritt wird nun eine leere Struktur des Häufigkeitsnetzes erstellt (**Arbeitsblatt**) und diese im zweiten Schritt mit konkreten Bezeichnungen befüllt (z. B. „Unfall U" vs. „kein Unfall $\overline{U}$" und „Alter 18-24 A" vs. „nicht 18–24 $\overline{A}$"; siehe **Abb. 1**).

Eintragen der gegebenen Informationen
Im nächsten Schritt werden alle Informationen, die in der Aufgabenstellung gegeben sind, an die passende Stelle im Häufigkeitsnetz eingetragen (**Abb. 2**).

Von insgesamt 100 000 Einwohnern (diese werden in den mittleren Knoten eingetragen) sind 600 verunfallt (U). Jeder 5. Verunfallte ist in der Altersklasse 18 bis 24. Nur 8 % der Gesamtbevölkerung entstammt dieser Altersklasse (**Abb. 2**).

Übersetzen in absolute Häufigkeiten
Nun kommt der wichtigste Schritt. Da Gigerenzer/Hoffrage (1995) und zahlreiche nachfolgende Studien zeigen konnten, dass Menschen sich Wahrscheinlichkeiten anhand einer konkreten Stichprobe besser vorstellen können, werden nun die Angaben „jeder fünfte" und „8 %" in Häufigkeiten übersetzt und so alle Knoten des Häufigkeitsnetzes Schritt für Schritt komplett ausgefüllt (**Abb. 3**).

Wenn von 100 000 Personen im Schnitt 600 Personen Opfer eines Unfalls waren, heißt das, dass 99 400 Personen *nicht* Opfer eines Unfalls wurden.

Wenn 8 % der 100 000 Einwohner der Altersklasse zwischen 18 und 24 angehören, gehören im Schnitt 8 000 Personen dieser Altersklasse an und 92 000 Personen nicht.

Wenn von den verunfallten Personen jede fünfte aus der Altersklasse 18 bis 24 stammt, so heißt das, dass von den 600 Personen, die bei einem Unfall verletzt wurden, 120 aus der Altersklasse 18 bis 24 sind und 480 Personen nicht aus dieser Altersklasse sind. Auch die weiteren Knoten lassen sich leicht ausfüllen nach dem Prinzip: Die Summe der äußeren beiden Knoten ergibt immer den mittleren Knoten – für jede der drei horizontalen und der drei vertikalen Strecken im Netz.

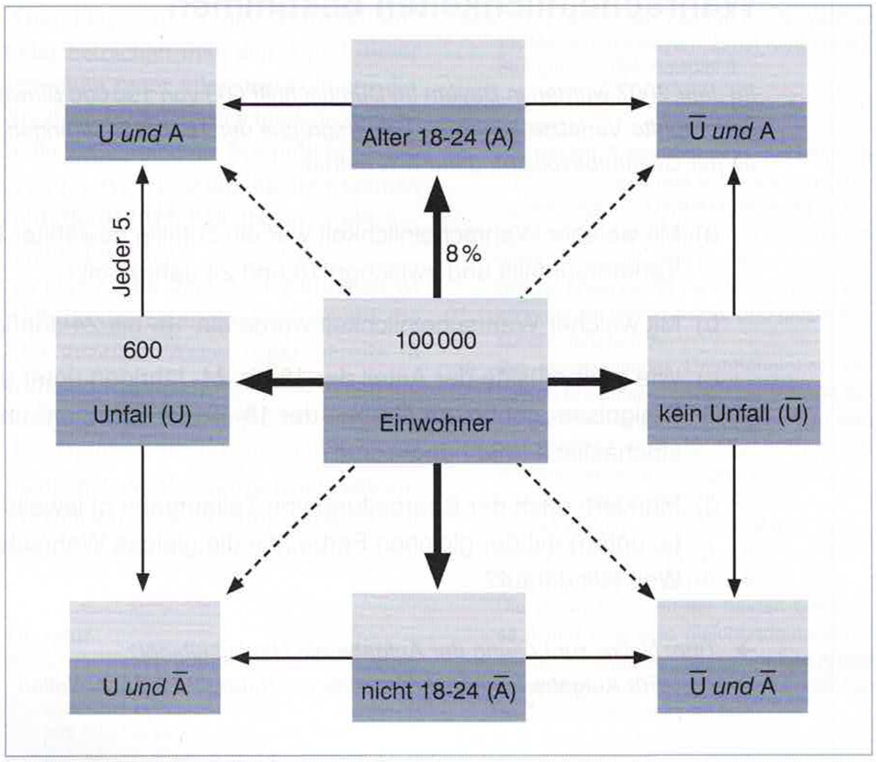


Abb. 2: Häufigkeitsnetz mit allen Informationen aus der Aufgabe

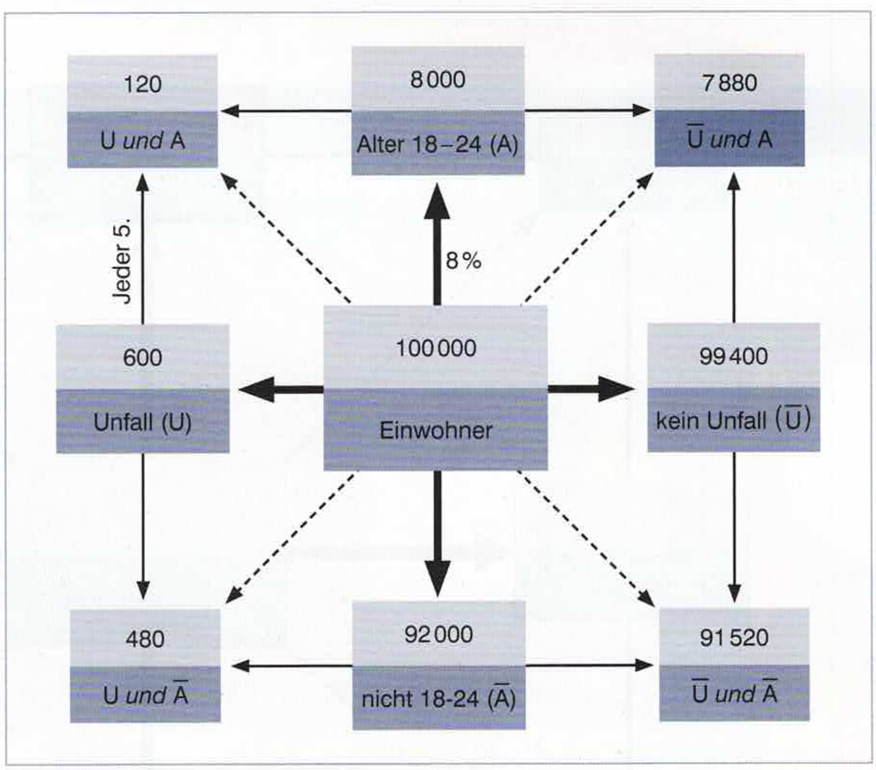


Abb. 3: Vollständig ausgefülltes Häufigkeitsnetz

Ablesen der Lösungen
Mit dem vollständig ausgefüllten Netz können nun alle erdenklichen Fragen zu bedingten Wahrscheinlichkeiten oder Schnittwahrscheinlichkeiten beantwortet werden. Die Antwort auf Frage a) lautet beispielsweise: Von 100 000 Einwohnern sind im Schnitt 120 Opfer eines Verkehrsunfalls und in der Altersklasse 18 bis 24. Dies entspricht einer Wahrscheinlichkeit von 0,12 %.

Auch Frage b) kann bequem aus dem Netz abgelesen werden: Von 8 000 Personen aus der Altersgruppe von 18 bis 24 waren im Schnitt 120 Opfer eines Verkehrsunfalls. Das entspricht einer Wahrscheinlichkeit von 1,5 %.

Für den Aufgabenteil c) kann ein neues Häufigkeitsnetz erstellt werden.

Name: Datum:

Wahrscheinlichkeiten bestimmen

Im Jahr 2007 wurden in Bayern im Durchschnitt 600 von 100 000 Einwohner bei einem Verkehrsunfall verletzt. Jeder fünfte Verletzte gehörte zur Altersgruppe der 18- bis 24-Jährigen, obwohl der Anteil dieser Altersgruppe an der Gesamtbevölkerung nur 8 % betrug.

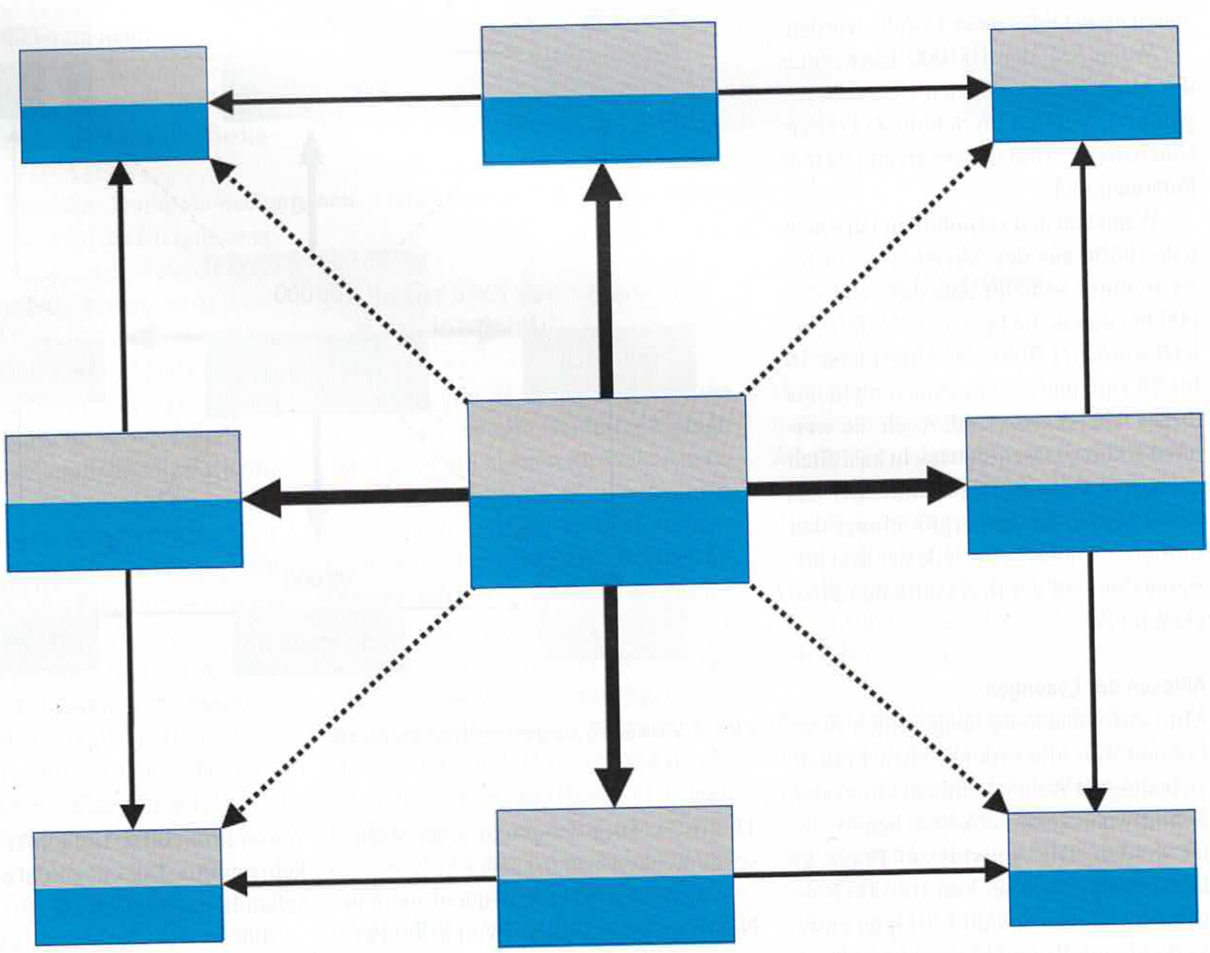
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit war ein zufällig gewählter Einwohner Bayerns Opfer eines Verkehrsunfalls und zwischen 18 und 24 Jahren alt?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde ein 18- bis 24-Jähriger Opfer eines Verkehrsunfalls?

c) Wie groß müsste der Anteil der 18 bis 24-Jährigen unter den Unfallopfern sein, damit die Ereignisse „gehört zur Gruppe der 18- bis 24-Jährigen" und „gehört zu den Unfallopfern" stochastisch unabhängig sind?

d) Markiere nach der Bearbeitung von Teilaufgabe c) jeweils alle Äste im Häufigkeitsnetz (s. unten) mit der gleichen Farbe, die die gleiche Wahrscheinlichkeit abbilden. Was fällt dir auf?

➔ *Tipp: Nutze zur Lösung der Aufgabe ein Häufigkeitsnetz.*
Für Aufgabe c) kannst du ein neues Häufigkeitsnetz erstellen.



Friedrich Verlag GmbH | mathematik lehren 224 | 2021 | Zum Beitrag S. 32 – 35.

Kontrastieren mit typischen Fehlern

Didaktisch vorteilhaft ist nun (gerade im Vergleich zu Vierfeldertafel und Baumdiagramm), dass man das Häufigkeitsnetz als Diskussionsgrundlage nutzen kann, um die richtigen Antworten mit den typischen falschen Antworten zu kontrastieren. Die beiden bedingten Wahrscheinlichkeiten P(Altersklasse 18 bis 24 | Unfall) = 20 %, P(Unfall | Altersklasse 18 bis 24) = 1,5 % und die Schnittwahrscheinlichkeit P(Unfall und Altersklasse 18 bis 24) = 0,12 % werden von Schülerinnen und Schülern gerne miteinander verwechselt.

Im Häufigkeitsnetz ist deutlich zu sehen, dass sich diese drei Wahrscheinlichkeiten alle auf dieselbe Teilmenge beziehen (Unfall und Altersklasse 18 bis 24), sich aber jeweils auf eine andere Obermenge beziehen: Geht es gerade um den Anteil der Verunfallten in dieser Altersklasse? Oder umgekehrt um den Anteil der Personen aus dieser Altersklasse unter den Verunfallten? Oder betrachtet man den Anteil dieser Personen unter allen Einwohnern der Stichprobe? Auch verschiedene sprachliche Variationen der Formulierung dieser drei Wahrscheinlichkeiten können mithilfe des Häufigkeitsnetzes gut unterstützt werden.

Das Lösen derartiger Aufgaben ist mithilfe des Häufigkeitsnetzes auf die hier gezeigte Weise sogar bereits in früheren Klassen möglich, in denen die Pfadregeln noch nicht thematisiert wurden. Darüber hinaus kann auch das Themengebiet der stochastischen Unabhängigkeit durch das Häufigkeitsnetz gut unterstützt werden.

Literatur

Binder, K./Krauss, S./Steib, N. (2020): Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Schnittwahrscheinlichkeiten GLEICHZEITIG visualisieren: Das Häufigkeitsnetz. – In: Stochastik in der Schule, 40(2), S. 2–14.

Gigerenzer, G./Hoffrage, U. (1995): How to improve Bayesian reasoning without instruction: frequency formats. – In: Psychological Review, 102(4), S. 684–704.

Götz, H. u.a. (2009): Lambacher Schweizer 11, Mathematik Bayern. Ernst Klett Verlag. Stuttgart, S. 184, Beispiel 3.

Lösungen:

c) Die beiden Ereignisse sind stochastisch unabhängig, wenn sie sich nicht gegenseitig beeinflussen. Dementsprechend müsste dann der Anteil der 18 bis 24-Jährigen unter den Unfallopfern genau so groß sein, wie der Anteil der 18 bis 24-Jährigen in der allgemeinen Bevölkerung. Und dieser entspricht gerade 8 %.

d) Bei stochastischer Unabhängigkeit der beiden Ereignisse „gehört zur Gruppe der 18- bis 24-Jährigen“ und „gehört zu den Unfallopfern“ sind die folgenden Wahrscheinlichkeiten jeweils gleich groß:
$P(U|A) = P(U) = P(U|\overline{A}) = 0{,}6\,\%$
$P(\overline{U}|A) = P(\overline{U}) = P(\overline{U}|\overline{A}) = 99{,}4\,\%$
$P(A|U) = P(A) = P(A|\overline{U}) = 8\,\%$
$P(\overline{A}|U) = P(\overline{A}) = P(\overline{A}|\overline{U}) = 92\,\%$
Die Unabhängigkeit der beiden Ereignisse A und U ist also gleichbedeutend mit der Unabhängigkeit der Ereignisse A und $\overline{U}$, oder der Ereignisse $\overline{A}$ und U oder der beiden Ereignisse $\overline{A}$ und $\overline{U}$.

Die passenden Häufigkeitsnetze finden Sie im Online-Material zu dieser Ausgabe.