KARIN BINDER, MARKUS VOGEL

Prä-Bayes'sche Verhältnisse

Mit Aufgabenvariationen zum Satz von Bayes

LERNGRUPPE: 4.–7. Schuljahr
IDEE: Einfache Kontexte und gute Visualisierungen machen die Idee des Satzes von Bayes leicht zugänglich
ARBEITSBLATT: Strukturgleiche Aufgaben
ZEITBEDARF: 1 Unterrichtsstunde

In unserer heutigen Gesellschaft sind wir tagtäglich einem „Trommelfeuer" aus Daten, Statistiken, Kurven und Trends ausgesetzt (Krämer, 1998). Unglücklicherweise unterliegen Laien und sogar Experten Urteilsfehlern mit teils dramatischen Folgen, wenn statistische Informationen miteinander verknüpft werden müssen. Besonders fehleranfällig sind Menschen bei Urteilen, die mathematisch im Zusammenhang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten und dem Satz von Bayes stehen. Selbst Fachleute (etwa Mediziner oder Juristen) liegen bei wichtigen, ihr Fachgebiet betreffenden, Entscheidungsprozessen in Bayesianischen Situationen oft beträchtlich daneben. So scheitern viele Menschen bei Fragestellungen wie etwa in der berühmten Mammographie-Aufgabe (nach Eddy 1982):

→ **Mammographie-Aufgabe**
Für eine Frau im Alter von 50 Jahren, die an einem routinemäßigen Screening zur Brustkrebsfrüherkennung teilnimmt, wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 1 % erwartet, dass sie Brustkrebs hat. Wenn eine Frau Brustkrebs hat, liegt die Wahrscheinlichkeit bei 80 %, dass sie einen positiven Mammographie-Befund erhält. Wenn eine Frau keinen Brustkrebs hat, ist die Wahrscheinlichkeit 10 %, dass sie dennoch einen positiven Befund erhält. Stellen Sie sich vor, eine Frau dieses Alters erhält einen positiven Mammographie-Befund. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie tatsächlich Brustkrebs hat?

Damals schätzten etwa 95 % der befragten Ärzte die Wahrscheinlichkeit als zwischen 70 % und 80 % liegend ein (vgl. Eddy 1982). Die richtige Antwort liegt hingegen bei 7,5 % (aktuell liegt der reale Wert im deutschen Brustkrebsscreening übrigens bei noch immer erschreckend niedrigen 13 %). Dass bei solchen Fragen die menschliche Intuition durchweg wenig zuverlässig ist, ist mittlerweile auch in der Schulpraxis gut untersucht und belegt. Welche Ansätze gibt es nun, um im Unterricht Schülerinnen und Schüler zu befähigen, Bayesianische Situationen durchdringen zu können?

In algebraisch-technischer Hinsicht wird zur Lösung solcher Probleme keine anspruchsvolle Mathematik benötigt – was in gewisser Weise erstaunlich ist. In der Mammographie-Aufgabe werden mit der Bruch- und Prozentrechnung lediglich Themen der Unter- bzw. Mittelstufenmathematik adressiert (vgl. auch das Beispiel zum Hörtest für Neugeborene in Strick 2012 oder Borovcnik 2016). Dies war für uns der Anlass, darüber nachzudenken, wie in der Unterstufe der Satz von Bayes im Sinne des Spiralprinzips mit gezielten Aufgabenvariationen vorbereitet werden kann. Wir betrachten dabei

- Variationen zur Art des Sachkontextes,
- Variationen zur Art, wie die statistische Information dargestellt wird und
- Variationen zur Art, welche Schlussfolgerungen zu ziehen sind.

Daneben greifen wir auf zwei bereits bekannte Strategien zurück, die sich in der Forschung zu Bayesianischen Aufgaben (s. Gigerenzer/Hoffrage 1995) als besonders lernwirksam erwiesen haben:

1. Darstellung der statistischen Informationen mit absoluten Häufigkeiten und
2. Visualisierung der statistischen Informationen beispielsweise mit Einheitsquadraten oder Baumdiagrammen.

Ansätze in der Unterstufe

Es lohnt sich also, Situationen mit zwei dichotomen Merkmalen bereits besonders früh zu unterrichten und im Laufe der Schulzeit immer wieder aufzugreifen. Vorformen Bayesianischer Aufgaben könnten bereits in der Grundschule unterrichtet werden, indem beispielsweise mit binären Türmchen aus je zwei bunten Steckwürfeln gearbeitet wird (z. B. gelb = Mädchen, rot = Junge, blau = hat ein Haustier, grün = hat kein Haustier; siehe Kurz-Milcke/Martignon 2006).

Es geht also darum, die Problemstellung didaktisch zu reduzieren, damit die mathematische Grundstruktur des richtigen In-Beziehung-Setzens von Teilmengen heraustreten kann. Hierzu lassen sich einige Aufgabenvariationen für die frühe Sekundarstufe I konzipieren, die wir im Folgenden darstellen. Die Aufgaben wurden von Lernenden dieser Jahrgangsstufe begeistert gelöst.

Variation der Sachkontexte

Ein erster Schritt zur Komplexitätsreduktion kann sein, den Sachkontext zu wechseln, aber die mathematische Grundstruktur beizubehalten (vgl. Eichler/Vogel 2013). Anstelle von Mammographie-Befunden oder HIV-Testergebnissen, können beliebige Beispiele aus der Alltags- und Erlebniswelt der Schülerinnen und Schüler betrachtet werden, bei denen Merkmale, die jeweils zwei sich gegenseitig ausschließende Ausprägungen haben (etwa „Mädchen, Jungen" und „Brille, keine Brille" oder „Schwimmer, Nichtschwimmer"), in ein zueinander bedingendes Verhältnis gestellt werden. So könnte eine strukturgleiche Aufgabe lauten:

→ **Schwimmflügel-Aufgabe (1)**
In der fünften Klassenstufe sind 60 % Jungen. Von den Jungen können 30 % nicht schwimmen und von den Mädchen können 20 % nicht schwimmen. Die Nichtschwimmer tragen im Schwimmunterricht Schwimmflügel, die Schwimmer gehen ohne Schwimmflügel ins Wasser. Als die Klasse nach dem Schwimmunterricht bereits auf dem Heimweg ist, entdeckt der Bademeister ein liegengebliebenes Paar Schwimmflügel. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gehören diese Schwimmflügel einem Jungen?

Lösung:
Wenn in einem Zufallsexperiment gedacht mit J (Junge), M (Mädchen), f (mit Schwimmflügeln) und o (ohne Schwimmflügel) die jeweiligen Zufallsereignisse abgekürzt seien, lässt sich die Lösung errechnen durch:

$$P(J|f) = \frac{P(J) \cdot P(f|J)}{P(J) \cdot P(f|J) + P(M) \cdot P(f|M)}$$
$$= \frac{60\,\% \cdot 30\,\%}{60\,\% \cdot 30\,\% + 40\,\% \cdot 20\,\%}$$
$$= 69{,}2\,\%$$

Ein Kontextwechsel der dichotomen Merkmale Geschlecht und Schwimmkenntnisse ermöglicht grundsätzlich beliebige Aufgabenkonstruktionen. Beim Wechsel von einer „realen Realität" zu einer „virtuellen Realität" (vgl. Eichler/Vogel 2014) können beliebige Merkmale zueinander in einen zwar künstlichen – und das erfahren die Lernenden auch –, aber dennoch realen Aufgabenzusammenhang gestellt werden, ohne dass die kontextuelle Sinnhaftigkeit und die innere Sachlogik leiden müssen. Auch mathematisch interessante „was-wäre-wenn"-Überlegungen werden durch solche Kontextvariationen leichter möglich.

Variation der statistischen Informationen

Wenn das Unterrichtsziel nicht das Rechnen mit Prozenten ist, kann das Übersetzen der prozentualen Angaben in absolute Häufigkeiten ein weiterer Schritt zur Problemvereinfachung sein. Dann wird statt von „15% Nichtschwimmer" zum Beispiel von „15 von 100 Kindern können nicht schwimmen" gesprochen (vgl. Gigerenzer/Hoffrage 1995):

→ **Schwimmflügel-Aufgabe (2)**
Von 100 Kindern in der fünften Klassenstufe sind 60 Jungen und 40 Mädchen. Von den 60 Jungen können 18 nicht schwimmen und von den 40 Mädchen 8 nicht. Die Nichtschwimmer tragen im Schwimmunterricht Schwimmflügel, die Schwimmer gehen ohne Schwimmflügel ins Wasser. Als die Klasse nach dem Schwimmunterricht bereits auf dem Heimweg ist, entdeckt der Bademeister ein liegengebliebenes Paar Schwimmflügel. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gehören diese Schwimmflügel einem Jungen?

Lösung:
$$P(J|f) = \frac{18}{18+8} = \frac{18}{26} = 69{,}2\,\%$$

Die Schülerinnen und Schüler sind nicht mehr in vergleichbarem Maße mit den Schwierigkeiten der Prozentrechnung befasst, da nur noch ein einfaches Verhältnis gebildet werden muss und so die Berechnung vereinfacht wird: 18 von 26 Kindern mit Schwimmflügeln sind Jungen.

„Gesichter" der Aufgabe

Für alle statistischen Angaben und auch die Fragestellung gibt es dabei drei „isomorphe Gesichter" (so Binder/Krauss/Wassner 2018; S. 9), die jeweils unterschiedliche Schwierigkeitsgrade für Schülerinnen und Schüler bedeuten:
1. Wie viele der A sind B?
2. Wie hoch ist der Anteil der B unter den A? und
3. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für B unter der Bedingung A?

Während für letztere Formulierung der Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit bekannt sein muss, können Fragen der Form 1 und 2 bereits in der Unter- und Mittelstufe beantwortet werden. Auf das Schwimmflügel-Beispiel bezogen, lassen sich demnach drei verschiedene Fragen stellen, die sich im Schwierigkeitsgrad unterscheiden:
1. Wie viele der Kinder mit Schwimmflügeln sind Jungen?
2. Wie groß ist der Anteil der Jungen unter den Schwimmflügelträgern?
3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um einen Jungen handelt, wenn ein Paar Schwimmflügel gefunden wird?

Die erste Frage lässt sich sogar vor der Bruch- oder Prozentrechnung beantworten. Es können also sowohl die Art der statistischen Informationen der Aufgabenstellung als auch die Art der statistischen Information nach der gefragt wird, variiert werden, um die Fragestellung einfacher oder schwieriger zu gestalten.

Visualisierungen

Mit Visualisierungen lassen sich Informationen aus der Textabfolge herauslösen – sie sind für Lernende damit eine Hilfe beim Erfassen des gegebenen Sachverhalts. Zwei Darstellungen sind dazu unseres Erachtens besonders geeignet: Das *Einheitsquadrat* und das *Baumdiagramm* (vgl. Böcherer-Linder u. a. 2018, Binder u. a. 2015).

Das Baumdiagramm (**Abb. 1**) hat eine hierarchische Struktur, die das Lesen entsprechend der Chronologie des Aufteilens in Teilgruppen visualisiert: Die 100 Kinder werden auf der ersten Ebene nach dem Merkmal Geschlecht in Jungen und Mädchen aufgeteilt. In der nächsten Baumebene gliedern sich beide Äste jeweils nach dem Merk-

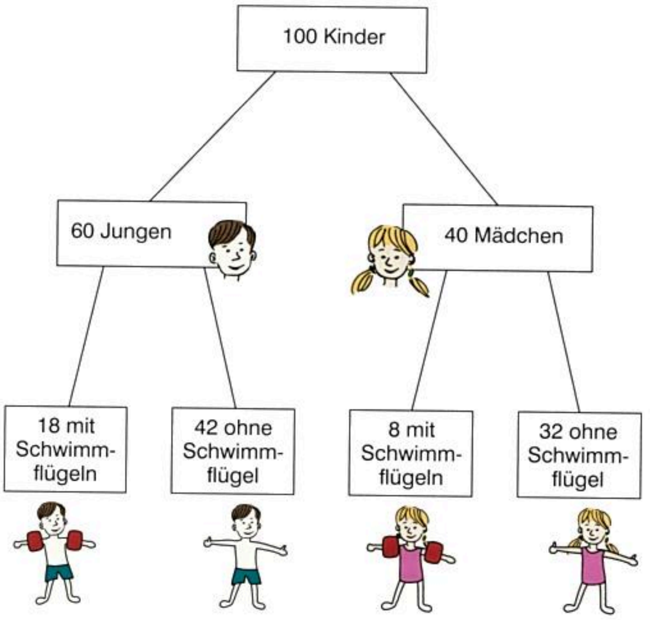


Abb.1: Baumdiagramm zur Visualisierung der Schwimmflügel-Aufgabe

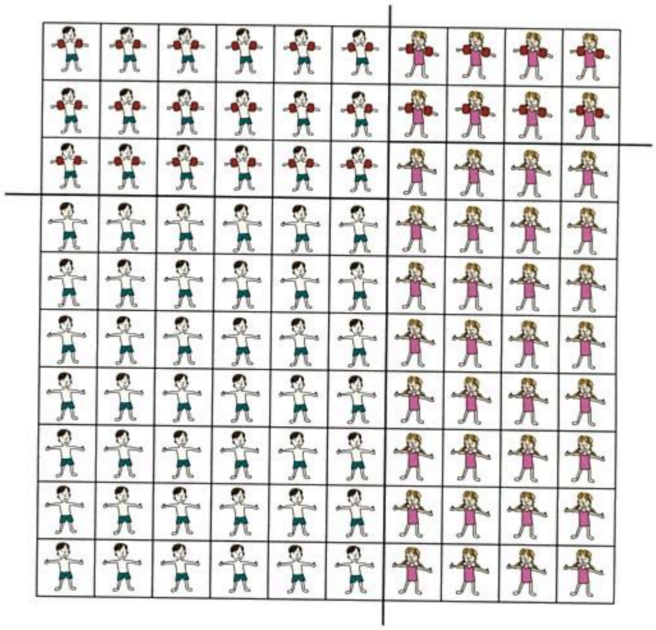


Abb. 2: Einheitsquadrat zur Visualisierung der Schwimmflügel-Aufgabe

mal der Schwimmfähigkeit auf. Für die Lösung müssen die Schülerinnen und Schüler die entsprechenden Knoten des Baumes richtig kombinieren.

Das Einheitsquadrat (**Abb. 2**) ist nicht-hierarchisch. Es wird zunächst vertikal in zwei Rechtecke aufgeteilt, die für die Jungen und Mädchen stehen. Anschließend werden diese Rechtecke jeweils horizontal unterteilt, sodass die nach Schwimmfähigkeit aufgegliederten Teilmengen von Jungen und Mädchen entstehen. Für die Lösung müssen die entsprechenden Teilmengen richtig kombiniert werden.

Egal, ob im Unterricht mit Einheitsquadrat, Baumdiagramm oder mit beiden Darstellungen gearbeitet wird: Für die Schülerinnen und Schüler lässt sich auf diese Weise die Sequenzierung auf der rein textuellen Ebene aufbrechen und der Fokus auf das Erkennen von Teilmengenbeziehungen lenken (vgl. Böcherer-Linder u. a. 2018).

Variationen im Kontext und in der Aufgabenstellung

Man kann die Sachkontexte nicht nur aus Gründen der Komplexitätsreduktion variieren, sondern auch, um die Schülerinnen und Schüler sich darin üben zu lassen, die relevanten Teilmengen in verschiedenen Sachkontexten zu identifizieren und zueinander in Beziehung zu setzen. Wenn es um Aufgaben einer „virtuellen" Realität geht (s. o.), sind der Fantasie keine Grenzen gesetzt, wie die Bayesianischen Probleme auf dem **Arbeitsblatt** zeigen.

Um Übergeneralisierungen zu vermeiden und ein vertieftes Verständnis für Situationen mit zwei dichotomen Merkmalen zu ermöglichen, sollten nicht nur Bayesianische Aufgaben gestellt, sondern vielfältige Fragen adressiert werden:

→ **Regenschirm-Aufgabe**
Von 100 Tagen sind 60 Sonnentage und 40 Regentage. An 40 Sonnentagen hat Frieda unnötigerweise den Schirm dabei, an 20 Sonnentagen hat sie ihn nicht dabei. An 30 Regentagen hat Frieda den Schirm dabei, an den übrigen Regentagen leider nicht. An wie vielen der 100 Tage wird Frieda nass?

Lösung: An 10 von 100 Tagen wird Frieda nass.

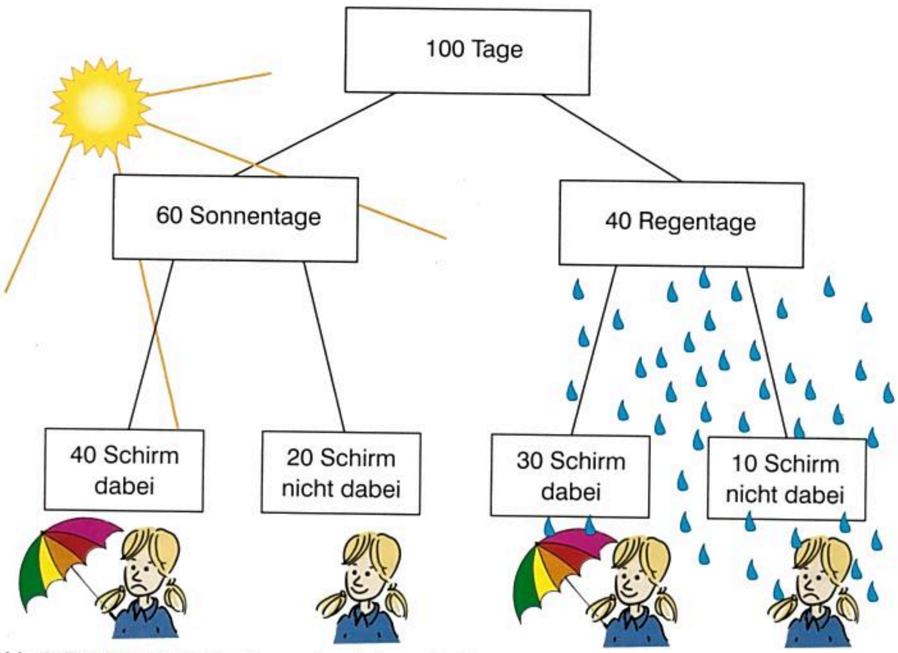


Abb. 3: Baumdiagramm zur Veranschaulichung der Regenschirm-Aufgabe

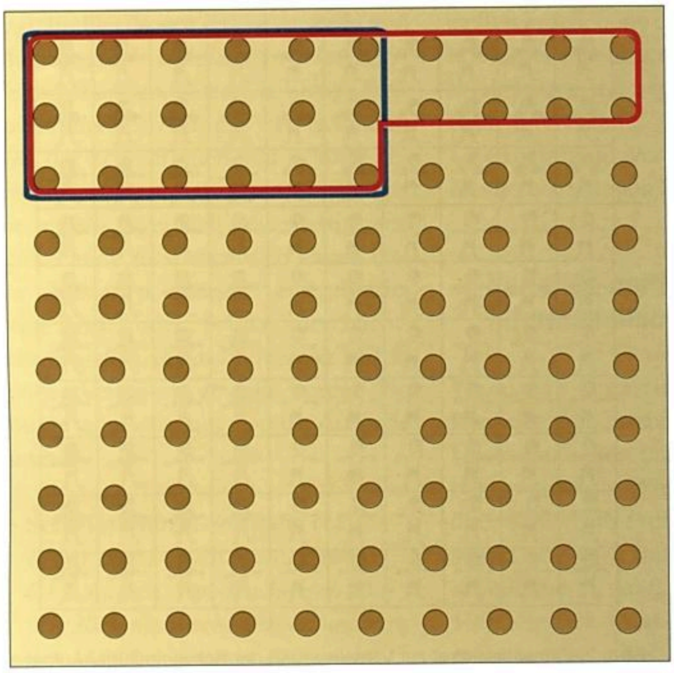


Abb. 4: Visualisierung am 10×10-Nagelbrett

In diesem Fall liegt kein Bayesianischer Rückschluss vor. Die Schülerinnen und Schüler können hier ein Baumdiagramm wie in **Abb. 3** erstellen (Darstellungswechsel) und sogar in Form von absoluten Zahlen antworten.

Inklusiv unterrichten mit passenden Arbeitsmitteln

Anteile mit Gummis spannen

Möchte man die enaktive Ebene stärker mit einbeziehen, kann man die Arbeit mit dem Einheitsquadrat durch Nagelbretter (oder Geobretter) mit 10×10 Nägeln nutzen und die entsprechenden Anteile mit farbigen Gummibändern umspannen (**Abb. 4**). Bei der Arbeit mit diesen „Bayes-Nagelbrettern" können die Schülerinnen und Schüler die Teilmengenbildungen aktiv nachvollziehen und diese Teilmengen bleiben sichtbar. (In Zeichnungen ist dies zuweilen durch Linien, die aufeinander zu liegen kommen, nicht immer gegeben.) Auch bleiben die absoluten Häufigkeiten im Nagelbrett sichtbar. Die Gummibänder haben den Vorteil, dass sie sich über Teilmengen hinweg spannen lassen, und ihre unterschiedliche Farbgebung schärft den Blick für die Verhältnisbildung.

Bildkarten nutzen

Eine weitere Möglichkeit der enaktiven Bearbeitung von Aufgaben mit zwei Merkmalen mit je zwei Merkmalsausprägungen bieten Kärtchen mit entsprechenden Bildzeichen.

Die zunächst ungeordneten Kärtchen können entsprechend sortiert und in einer Vierfeldertafel angeordnet werden (**Abb. 5**). Nun lassen sich bereits Fragen beantworten wie „Gibt es mehr Ostereier mit oder ohne Schleife?" oder „Wie viele der Eier mit Schleife sind auch bemalt?", um Bayesianisches Denken anzubahnen. Einziger kognitiver Schritt, der noch vollzogen werden muss, ist der Übergang auf die numerische Ebene (z. B. von „2 Eier, die nicht bemalt sind und keine Schleife haben" hin zur konkreten Zahldarstellung „2").

Die Bildkärtchen eignen sich auch zur Einführung von Baumdiagrammen in der Unterstufe (vgl. auch die in Kurz-Milcke/Martignon 2006, S. 194 vorgeschlagenen „Urnenbäume"). Hierzu wird aus Schachteln eine Baumstruktur wie in **Abb. 6** aufgebaut, die dann in zwei Schritten mit den entsprechenden Bildkärtchen gefüllt wer-

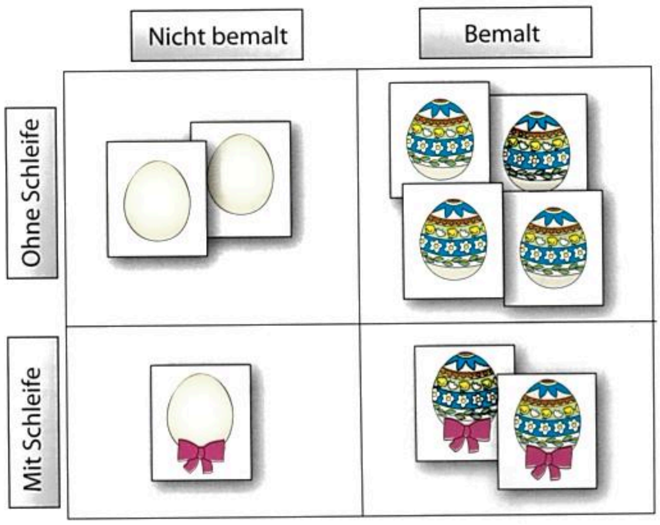


Abb. 5: Angeordnete Bildkärtchen in einer Vierfeldertafel

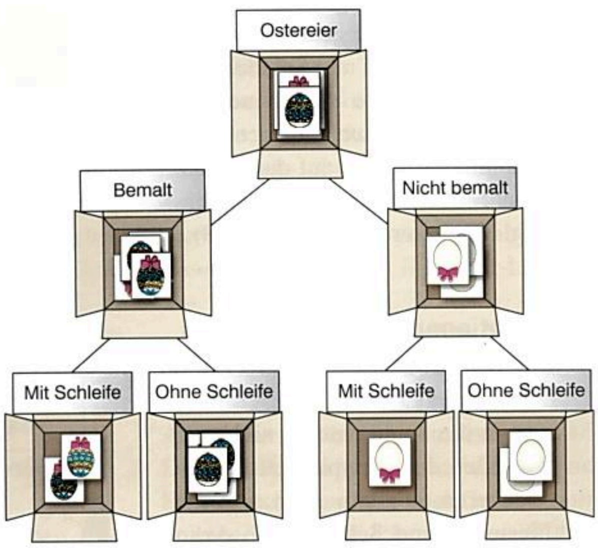


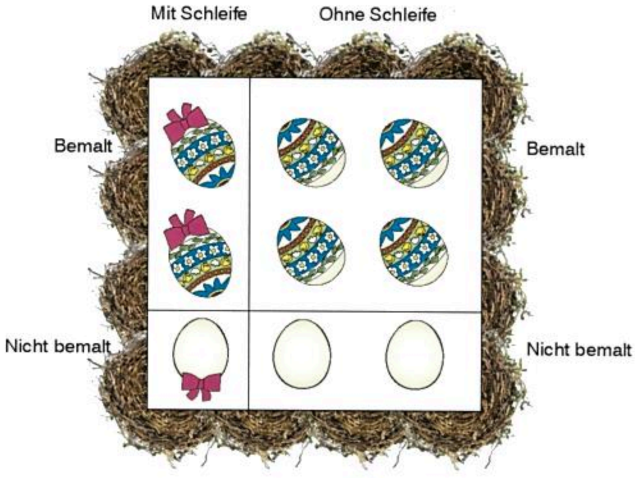
Abb. 6: Urnenbaum, in dem die Bildkärtchen in die jeweiligen Schachteln gelegt werden.

Name: Datum: Thema:

Wahrscheinlichkeiten bestimmen

1. Das Zufalls-Ei

Zu Ostern findet Max in seinem Osternest in diesem Jahr neun Ostereier. Manche der Ostereier sind sogar vorher aufwendig bemalt worden, andere hingegen nicht. Drei der Eier sind mit einer kleinen roten Schleife verziert.



a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, ein bemaltes Ei zu erwischen, wenn Max mit geschlossenen Augen nach einem Ei mit einer Schleife greift?

b) Ist der Anteil der bemalten Eier größer unter den Eiern mit einer Schleife oder unter den Eiern ohne Schleife?

2. Weihnachtsmann-Aufgabe

Der Weihnachtsmann liefert die Geschenke aus. Unterwegs kommt ihm durch einen Windstoß die Liste abhanden und er muss die restlichen Geschenke aus dem Gedächtnis heraus ausliefern. So bekommen zwei von den nicht-braven Kindern irrtümlich trotzdem Geschenke und zehn von den braven Kindern erhalten leider kein Geschenk. Wie groß ist der Anteil der braven Kinder unter allen Kindern, die vom Weihnachtsmann ein Geschenk erhalten haben?

den (z. B. erst die Sortierung nach Bemalt / Nicht bemalt; danach Mit / Ohne Schleife).

Fazit

Das In-Beziehung-Setzen von Teilmengen in vielfältigen Problemkontexten, mit unterschiedlichen Visualisierungen und für verschiedene Fragestellungen dient unseres Erachtens nicht nur der Vorbereitung des Satzes von Bayes im Unterstufenunterricht, sondern ist per se zutiefst mathematischer und allgemeinbildender Natur. Dass Bayesianische Aufgaben dann später besser verstanden werden, erhoffen wir als Folge davon.

Literatur

Binder, K. / Krauss, S. / Bruckmaier, G. (2015): Effects of visualizing statistical information – an empirical study on tree diagrams and 2×2 tables. – In: Frontiers in psychology, 6(1186).

Binder, K. / Krauss, S. / Wassner, C. (2018): Der Häufigkeitsdoppelbaum als didaktisch hilfreiches Werkzeug von der Unterstufe bis zum Abitur. In: Stochastik in der Schule 38(1), S. 1 – 11.

Borovcnik, M. (2016): „To Screen or not to screen" Dialoge zur medizinischen Diagnose. – In: mathematik lehren Heft 194, S. 22 – 28..

Böcherer-Linder, K. / Eichler, A. / Vogel, M. (2018): Die Formel von Bayes: Kognitionspsychologische Grundlagen und empirische Untersuchungen zur Bestimmung von Teilmenge-Grundmenge-Beziehungen. – In: Journal für Mathematik-Didaktik, 39(3), S. 1-20.

Eicher, A. / Vogel, M. (2013): Die Leitidee Daten und Zufall. Wiesbaden: Vieweg+Teubner (2., akt. Auflage).

Eichler, A. / Vogel, M. (2014): Three Approaches for Modelling Situations with Randomness. – In: E. J. Chernoff & B. Sriraman (Hrsg.), Probabilistic thinking. Springer, Dordrecht S. 75-100.

Eddy, D. M. (1982): Probabilistic reasoning in clinical medicine: Problems and opportunities. – In: Kahneman, D./Slovic P./Tversky A. (Hrsg): Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases. New York: Cambridge University Press; S. 249–267.

Gigerenzer, G. / Hoffrage, U. (1995): How to improve Bayesian reasoning without instruction: frequency formats. – In: Psychological review, 102(4).

Krämer, W. (1998): So lügt man mit Statistik. Campus Verlag.

Kurz-Milcke, E. / Martignon, L. (2006): Lebendige Urnen und ereignisreiche Bäume: Überlegungen und Versuche zu einer Didaktik der Stochastik in der Grundschule. – In: Anregungen zum Stochastikunterricht, Bd, 3, S. 181-203.

Strick, H.K. (2012): Hörscreening für Neugeborene. – In: mathematik lehren, Heft 175, Friedrich Verlag S. 45 – 48.